Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *V každé ze čtyř místností je několik předmětů. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Jednu n-tinu předmětů z první místnosti přeneseme do místnosti druhé. Následně jednu n-tinu (z nového počtu) předmětů přeneseme z druhé místnosti do třetí. Podobně pak ze třetí místnosti do čtvrté a ze čtvrté do první. (Vždy přitom přenášíme celé předměty.) Víte-li, že na konci byl v každé místnosti stejný počet předmětů, určete, kolik nejméně předmětů mohlo být na začátku ve druhé místnosti. Pro která n se tak může stát?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Přirozená čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud je jejich největší společný dělitel roven 1, tedy $\operatorname{nsd}(a,b) = 1$. Připomeňte si základní vlastnosti nesoudělných čísel:
   (a) Po sobě jdoucí přirozená čísla jsou nesoudělná.
   (b) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\operatorname{nsd}(a,b) = 1$ a $b \mid ac$, pak platí i $b \mid c$.
   (c) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\operatorname{nsd}(a,b) = 1$, $a \mid c$ a $b \mid c$, pak platí i $ab \mid c$.
2. Řešte podobnou úlohu pro tři místnosti namísto čtyř.

2. *Nalezněte nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost*

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pro každé $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž platí $|x^2 - 2| \leqq m$ pro každé $x \in \langle -2, 2 \rangle$.
2. Ukažte, že pro každou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ existují čísla $u, v \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = (x-u)^2 + v$. Graf každé takové funkce je tedy posunutím paraboly $y = x^2$.
3. Jsou dána tři reálná čísla a, b, c, přičemž každá dvě se liší alespoň o 1. Ukažte, že pokud nějaké $m \in \mathbb{R}$ splňuje $|a| \leqq m$, $|b| \leqq m$, $|c| \leqq m$, pak $m \geqq 1$.
4. Ukažte, že pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = x^2 + ax + b$ platí alespoň jedna z nerovností $f(-1) - f(0) \geqq 1$, $f(1) - f(0) \geqq 1$. Platí závěr i tehdy, pokud nahradíme trojici čísel -1, 0, 1 trojicí čísel $t-1$, t, $t+1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$?

D1. Rozhodněte, zda existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že rovnice $ax^2 + bx + c + t = 0$ má dva reálné kořeny, ať zvolíme parametr $t \in \mathbb{R}$ jakkoli.

D2. Buďte a, b, c reálná čísla. Dokažte, že alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (a-b)x + (b-c) &= 0,\\ x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0,\\ x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0, \end{aligned}$$

má reálný kořen. [Ruská MO 2007. Uvažte, že stačí, aby některá ze tří kvadratických funkcí z levých stran měla nekladnou hodnotu pro $x = 0$. Může se stát, že by hodnoty v nule vyšly všechny tři záporné?]

D3. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice, víte-li, že je celočíselný. [Ukažte, že z hodnot $Q(-22)$, $Q(7)$, $Q(13)$ musejí být dvě shodné. Co to pak znamená pro osu souměrnosti paraboly — grafu funkce $Q(x)$?]

3. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a delší odvěsnou BC. Nechť D je pata výšky z vrcholu C. Kružnice k se středem D a poloměrem CD protíná odvěsnu BC v bodě Q a dále přímku AB v bodech E a F ($E \neq F$), kde F je bodem přepony AB. Úsečka QE protíná odvěsnu AC v bodě P. Dokažte, že $|PE| = |QF|$.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Zopakujte si větu o středovém a obvodovém úhlu.
2. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X tak, že $|\sphericalangle ADX| = 30°$. Průsečíky úseček XC a XD se stranou AB označme postupně Y a Z. Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku XYZ.

D1. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X. Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z. Ukažte, že $YZ \perp AC$. [Nalezněte skrytou čtveřici bodů, co leží na jedné kružnici.]

D2. Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ zvolme postupně body K a L tak, že $|\sphericalangle LAK| = 45°$. Ukažte, že $|BK| + |DL| = |KL|$. [Otočte bod K o $90°$ kolem A a užijte shodnosti vhodných trojúhelníků.]

4. *Nela s Janou zvolí přirozené číslo k a následně hrají hru s tabulkou o rozměrech 9×9. Začínající Nela pokaždé svým tahem vybere jedno prázdné políčko a vepíše do něj nulu. Zato Jana ve svém tahu do nějakého prázdného políčka napíše jedničku. Navíc po každém tahu Nely následuje k tahů Jany. Pokud se kdykoli během hry stane, že součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je lichý, vítězí Jana. Pokud dívky vyplní celou tabulku, aniž by se tak stalo, vítězí Nela. Nalezněte nejmenší hodnotu k, pro niž má Jana vítěznou strategii.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Řešte danou hru nejprve v tabulce 3×3.
2. Na kouzelném stromě vyrostlo 25 citronů a 30 pomerančů. Sadař utrhne každý den dva plody, poté přes noc vždy na stromě vyroste jeden nový plod, a to pomeranč (resp. citron), byly-li utržené plody stejné (resp. různé). Jaký plod vyroste na stromě poslední? [Citron — jejich počet je totiž po každé noci lichý.]

D1. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leqq k \leqq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii. [64–C–I–3]

D2. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka krále. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál.

Ukažte, že hráč hrající jako první má vítěznou strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×1 a nalezněte pro prvního hráče strategii, v níž do žádného obdélníčku netáhne jako první.]

D3. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka koně. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál. Ukažte, že začínající hráč má vyhrávající strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×4 a v nich políčka rozdělte do dvojic se stejným úmyslem jako v úloze D2.]

5. *Je dán trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC a na polopřímkách opačných k polopřímkám BC, CB zvolme postupně body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Přímky KX a LY se protínají v bodě M. Dokažte, že těžiště trojúhelníku KLM splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že v každém trojúhelníku ABC je osa vnitřního úhlu kolmá na osu vnějšího úhlu u téhož vrcholu.
2. Je dán trojúhelník ABC a jeho těžiště T. Rovnoběžka se stranou BC vedená bodem T oddělí menší trojúhelník ADE. Určete, jaký je poměr obsahů trojúhelníků ABC a ADE.

D1. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a I_a střed kružnice připsané straně BC. Ukažte, že
   (a) body B, C, I, I_a leží na kružnici s průměrem II_a [užijte výsledek úlohy N1],
   (b) střed úsečky II_a leží na ose úsečky BC,
   (c) body dotyku kružnice vepsané a kružnice připsané straně BC se stranou BC jsou souměrně sdružené podle osy úsečky BC.

D2. Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C. Osa o_1 úsečky AC protíná stranu AB v bodě K, osa o_2 úsečky BC protíná stranu AB v bodě L. Průsečík os o_1 a o_2 označme O. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC leží na kružnici opsané trojúhelníku OKL. [64–A–II–1]

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

6. *Na tabuli je napsán součin*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pro která přirozená čísla $n \geqq 2$ je možno za některé z činitelů dopsat vykřičník, a nahradit je tak jejich faktoriály, aby výsledný součin byl roven druhé mocnině přirozeného čísla?

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jaký nejmenší násobek čísla 2016 je druhou mocninou přirozeného čísla?
2. Pro jaké nejmenší přirozené číslo n platí $2015 \mid n!$?

3. Kolika nulami končí číslo 2015!?
4. Pro dané přirozené číslo n a prvočíslo p uvažme největší nezáporné celé číslo k, pro něž platí $p^k \mid n$. Toto číslo k budeme značit $v_p(n)$ a říkat mu p-valuace čísla n. Jiný pohled na věc je, že $v_p(n)$ značí exponent u prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n. Pro libovolná přirozená čísla a, b ukažte následující:
   (a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,
   (b) $v_p(a^b) = bv_p(a)$.
   (c) Přirozené číslo b je druhou mocninou, právě když $v_p(b)$ je sudé pro každé prvočíslo p.
   (d) $a \mid b$, právě když $v_p(a) \leqq v_p(b)$ pro každé prvočíslo p.
   (e) Je-li $v_p(a) \neq v_p(b)$, pak platí $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.

D1. Zjistěte, pro která přirozená čísla $n \geqq 2$ je možno za některé z činitelů součinu

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

dopsat vykřičník tak, aby výsledný součin nebo jeho dvojnásobek byl roven *třetí* mocnině přirozeného čísla. [Hledaná jsou právě ta složená n, pro něž je i číslo $n-1$ složené.]

D2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n a libovolné prvočíslo p platí vzorec

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \ldots .$$

D3. Ukažte, že

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

kde $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p. [Zapište n v soustavě o základu p jako $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k$, užijte výsledku D2 a u jednotlivých koeficientů pak sečtěte geometrickou posloupnost mocnin p.]

D4. Nalezněte všechna n přirozená, pro něž $2^{n-1} \mid n!$ [Užijte výsledku předchozí úlohy.]

D5. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n je výraz

$$\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(m+n)!}$$

vždy roven celému číslu. [MMO 1972]

D6. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n platí

$$v_p\left(\binom{n+m}{m}\right) = \frac{s_p(n) + s_p(m) - s_p(m+n)}{p-1},$$

kde opět $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p. Souvisí výsledek s počtem „přenosů“ při písemném sčítání v soustavě o základu p?