Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Pro přirozená čísla k, l, m platí*

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2\,051}{404}.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu klm.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V přirozených číslech řešte rovnici $\frac{1}{p+1/q} = \frac{2015}{2016}$. [$p = 1$, $q = 2\,015$]
2. Připomeňte si důležitý poznatek o dělitelnosti celých čísel: dělí-li číslo x součin yz a jsou-li přitom čísla x a y nesoudělná, pak číslo x dělí samo číslo z. Využijte pak toto pravidlo ke zdůvodnění takového závěru: pokud pro přirozená čísla a, b, c, d jsou oba zlomky $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ v základním tvaru, platí $a = c$ a $b = d$.
3. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, k, l platí, že ka dělí b a lb dělí a, pak $k = l = 1$ a $a = b$. [Dělitel nemůže být (v absolutní hodnotě) větší než dělenec, proto $ka \leqq b$ a $lb \leqq a$, takže $kla \leqq lb \leqq a$, tedy $kl \leqq 1$ a odtud $k = l = 1$. Nakonec zpětně $a \leqq b \leqq a$, což nastává, pouze pokud $a = b$.]

D1. Najděte alespoň jedno řešení rovnice

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2051}{404}$$

v racionálních číslech, pro které je hodnota součinu klm rovna $2\,016$. [Dosazením $klm = 2\,016$ a $lm = 2\,016/k$ dostaneme volbou $k = 1$ jedno z řešení $(k, l, m) = (1, 2\,016 \cdot 404/(1\,647 \cdot 2\,017), 2\,017 \cdot 1\,647/404)$.]

2. *Do čtvercové tabulky* 11×11 *jsme vepsali přirozená čísla* $1, 2, \ldots, 121$ *postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou* 4×4 *jsme všemi možnými způsoby zakryli právě* 16 *políček. Kolikrát byl součet zakrytých* 16 *čísel druhou mocninou celého čísla?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Do čtvercové tabulky velikosti 5×5 jsme vepsali přirozená čísla $1, 2, \ldots, 25$ postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou velikosti 2×2 jsme všemi možnými způsoby zakryli čtyři políčka.
   1. Jaký nejmenší a jaký největší součet mohou mít čtyři zakrytá čísla? [16, 88]
   2. Kolika způsoby můžeme takto destičku položit? [16]
   3. Bude součet čtyř zakrytých čísel vždy dělitelný čtyřmi? [Ano]
   4. Kolikrát bude součet zakrytých čtyř čísel druhou mocninou celého čísla? [3krát]
2. Do políček čtvercové tabulky 11×11 jsme postupně zleva doprava a shora dolů zapsali čísla $1, 2, \ldots, 121$. Čtvercovou destičkou velikosti 3×3 jsme všemi možnými způsoby zakryli přesně devět políček. V kolika případech byl součet devíti zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? [62–B–S–2]

D1. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „–“ a v ostatních polích „+“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet. [64–C–II–2]

D2. V každém políčku tabulky 8×8 je napsáno jedno nezáporné celé číslo tak, že každá dvě čísla, která jsou na políčkách souměrně sdružených podle jedné nebo druhé úhlopříčky, jsou stejná. Součet všech 64 čísel je 1 000, součet 16 čísel na úhlopříčkách je 200. Ukažte, že součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky je nejvýše 300. Platí stejný závěr i pro číslo 299? [63–B–II–4]

3. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ cm a $|BC| = 3$ cm leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC, zatímco k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu poloměru r_2.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ se navzájem vně dotýkají, jejich společnou vnější tečnu označme P_1P_2, přičemž $P_1 \in k_1$ a $P_2 \in k_2$. Přesvědčte se, že platí $(r_1 + r_2)^2 = |P_1P_2|^2 + (r_1 - r_2)^2$. [Rovnice je Pythagorova věta pro pravoúhlý trojúhelník s přeponou S_1S_2.]
2. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, AC, AB postupně v bodech K, L, M. Dokažte rovnosti $|AL| = |AM| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC| - |BC|)$, $|BK| = |BM| = \frac{1}{2}(|BC| + |AB| - |AC|)$ a $|CK| = |CL| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC| - |AB|)$. [Body dotyku vepsané kružnice se stranami rozdělují hranici trojúhelníku na tři dvojice úseček stejných délek.]

D1. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c je průměr vepsané kružnice roven $a + b - c$. [Jsou-li D a E postupně body dotyku vepsané kružnice o středu S s odvěsnami BC a AC, je $SDCE$ čtverec, takže $|CD| = \frac{1}{2}(a + b - c) = |SD| = r$.]

D2. Poloměr vepsané kružnice trojúhelníku ABC je r. Sestrojme tři různé tečny vepsané kružnice rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Poloměry vepsaných kružnic tří malých „odříznutých“ trojúhelníků označme r_A, r_B, r_C podle vrcholů trojúhelníku. Dokažte, že $r_A + r_B + r_C = r$. [Z podobnosti malého trojúhelníku k ABC je $r_A/r = (v_a - 2r)/v_a$, kde v_a značí velikost výšky z vrcholu A v trojúhelníku ABC. Podobné rovnice platí i pro ostatní vrcholy, takže zbývá ukázat, že $1/v_a + 1/v_b + 1/v_c = 1/r$. Zde využijime vzorce $ro = 2S = av_a = bv_b = cv_c$, kde $o = a + b + c$.]

4. *Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má právě tři dělitele. Jak se změní odpověď, hledáme-li nejmenší trojmístné liché číslo s právě třemi děliteli? [4; 121]
2. Najděte všechna přirozená čísla, která mají stejný počet sudých i lichých dělitelů. [$2m$, kde m je libovolné liché číslo]

D1. Nechť m je přirozené číslo, které má sedm kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má devět kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$? [64–B–I–4]

D2. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla n je 20^{15}. Určete n. [64–B–II–1]

5. *Vrcholy konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ leží na kružnici, přičemž $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF se protínají v bodě G a úsečky BE a DF se protínají v bodě H. Dokažte, že úsečky GH, AD a BC jsou navzájem rovnoběžné.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že tětivový lichoběžník je rovnoramenný. [Osy obou rovnoběžných základen lichoběžníku procházejí středem opsané kružnice, jsou tedy shodné.]
2. Ukažte, že pokud dvě různoběžné protilehlé strany tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku, je čtyřúhelník lichoběžníkem. [Jsou-li shodné strany AB a CD, uvažme osu o úsečky BC, ta prochází středem S opsané kružnice. Rovnoramenné trojúhelníky ABS a CDS jsou shodné, a tudíž souměrně sdružené podle osy o.]

D1. Je dána tětiva AB kružnice k se středem v bodě S. Na úsečce AB zvolme bod M a průsečík kružnice opsané trojúhelníku AMS s kružnicí k označme C. Dokažte, že úhly MCS a MBS jsou shodné. [Stačí využít rovnost úhlů v rovnoramenném trojúhelníku ABS a obvodové úhly nad MS v kružnici opsané trojúhelníku AMS.]

D2. Ve vnější oblasti kružnice k je dán bod A. Všechny lichoběžníky, které jsou do kružnice k vepsány tak, že jejich prodloužená ramena se protínají v bodě A, mají společný průsečík úhlopříček. Dokažte. [47–A–III–5]

6. *Kladná reálná čísla a, b, c jsou taková, že hodnoty*

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

jsou navzájem různé. Zapišme je od nejmenší po největší:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zjistěte, kolik různých pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ indexů 1 až 6 můžeme dostat, když budeme různě volit čísla a, b, c.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ dokažte nerovnost $1/a \geqq 1/b \geqq 1/c$. [První nerovnost vynásobíme ab a druhou bc.]
2. Pro kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ dokažte nerovnost $1/a \geqq 2/(b+c)$. [Vynásobte nerovnost výrazem $a(b+c)$ a využijte nerovnosti $a \leqq b$ a $a \leqq c$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leqq 3.$$

Určete, kdy nastane rovnost. [64–B–S–3]

D2. Jsou dána reálná čísla a, b, c, pro která platí $abc = 1$. Dokažte, že nejvýše dvě z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

jsou větší než 1. [KMS, 3. zimní série 2012/2013, úloha 7]