Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V každé ze čtyř místností je několik předmětů. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo. Jednu n-tinu předmětů z první místnosti přeneseme do místnosti druhé. Následně jednu n-tinu (z nového počtu) předmětů přeneseme z druhé místnosti do třetí. Podobně pak ze třetí místnosti do čtvrté a ze čtvrté do první. (Vždy přitom přenášíme celé předměty.) Víte-li, že na konci byl v každé místnosti stejný počet předmětů, určete, kolik nejméně předmětů mohlo být na začátku ve druhé místnosti. Pro která n se tak může stát?*

Řešení. Při analýze počtu předmětů po jednotlivých krocích budeme postupovat „odzadu“. Ukažme předně, jak lze z počtů předmětů ve dvou místnostech po předávce určit počty předmětů před ní. Řekněme, že v místnostech A a B je před předávkou z A do B postupně a a b předmětů. Tyto počty po předávce označme a', b'. Podle zadání platí

$$a' = \frac{n-1}{n}a, \qquad b' = b + \frac{1}{n}a.$$

Z první rovnosti a následně ze vztahu $a + b = a' + b'$ najdeme

$$a = \frac{n}{n-1}a', \qquad b = b' - \frac{1}{n-1}a'.$$

Označme nyní M počet předmětů nacházejících se na konci v každé ze čtyř místností. Opakovaným užitím odvozeného vztahu $(a', b') \to (a, b)$ se dopracujeme až k vyjádření počátečních počtů pomocí hodnot M a n:

Na konci:	M,	M,	M,	M;
před $4 \to 1$:	$\dfrac{n-2}{n-1}M$,	M,	M,	$\dfrac{n}{n-1}M$;
před $3 \to 4$:	$\dfrac{n-2}{n-1}M$,	M,	$\dfrac{n}{n-1}M$,	M;
před $2 \to 3$:	$\dfrac{n-2}{n-1}M$,	$\dfrac{n}{n-1}M$,	M,	M;
před $1 \to 2$:	$\dfrac{n(n-2)}{(n-1)^2}M$,	$\dfrac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M$,	M,	M.

Jelikož byl počet předmětů v první místnosti na začátku kladný, musí být $n \geqq 3$. Nyní již snadno určíme nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V_2 = \frac{(n-1)^2+1}{(n-1)^2}M.$$

Čitatel a jmenovatel zlomku se liší o jedna, a tak zlomek nelze krátit. Má-li vyjít celé číslo, musí tudíž být $M = k \cdot (n-1)^2$ pro vhodné k, a tedy $V_2 = k\big((n-1)^2+1\big)$.

Pro $n \geqq 3$ je ovšem $(n-1)^2+1 \geqq 5$, proto i $V_2 \geqq 5$. Volbou $n=3$, $k=1$ a $M=4$ pak dosáhneme hodnoty $V_2=5$, přičemž se snadno přesvědčíme, že odpovídající čtveřice $(3,5,4,4)$ vyhovuje podmínkám úlohy: po jednotlivých předávkách z ní dostaneme čtveřici $(2,6,4,4)$, pak $(2,4,6,4)$, poté $(2,4,4,6)$ a konečně $(4,4,4,4)$. Hledaný minimální počet předmětů v druhé místnosti je tak opravdu 5 a lze jej dosáhnout pouze pro $n=3$, neboť pro $n \geqq 4$ je $V_2 \geqq 3^2+1=10$.

Jiné řešení. Označme počáteční počty předmětů v místnostech po řadě a, b, c, d a postupně určujme počty předmětů v jednotlivých místnostech po jednotlivých předávkách.

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Na začátku:} & a, & b, & c, & d; \\
\text{po } 1 \to 2\text{:} & \dfrac{n-1}{n}a, & b+\dfrac{a}{n}, & c, & d; \\
\text{po } 2 \to 3\text{:} & \dfrac{n-1}{n}a, & \dfrac{n-1}{n}\left(b+\dfrac{a}{n}\right), & c+\dfrac{1}{n}\left(b+\dfrac{a}{n}\right), & d.
\end{array}$$

Pro zjednodušení označme $t=b+a/n$ (zdůrazněme, že t je celé). Po dalším kroku $3 \to 4$ dostaneme čtveřici počtů:

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(c+\frac{t}{n}\right), \quad d+\frac{1}{n}\left(c+\frac{t}{n}\right).$$

Jelikož se počty předmětů ve druhé a třetí místnosti již dále nebudou měnit, můžeme je porovnat už nyní a zjistit tak, že

$$t=c+\frac{t}{n} \quad \text{neboli} \quad c=\frac{n-1}{n}t.$$

Jelikož n a $n-1$ jsou nesoudělná čísla, usoudíme, že n dělí t.

Po dosazení za c můžeme čtveřici po třetí předávce přepsat na

$$\frac{n-1}{n}a, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad d+\frac{t}{n},$$

a proto po posledním kroku kroku $4 \to 1$ dojdeme ke čtveřici

$$\frac{n-1}{n}a+\frac{1}{n}\left(d+\frac{t}{n}\right), \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}\left(d+\frac{t}{n}\right).$$

Protože má jít o čtyři stejná čísla, porovnáním třetího a čtvrtého z nich zjistíme, že

$$t=d+\frac{t}{n} \quad \text{neboli} \quad d=\frac{n-1}{n}t.$$

Díky tomu můžeme závěrečnou čtveřici ještě zjednodušit na

$$\frac{n-1}{n}a+\frac{1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t, \quad \frac{n-1}{n}t.$$

To jsou čtyři stejná čísla, právě když platí

$$\frac{n-1}{n}a+\frac{1}{n}t=\frac{n-1}{n}t \quad \text{neboli} \quad a=\frac{n-2}{n-1}t.$$

Jelikož $a > 0$, je nutně $n \geqq 3$. Navíc z nesoudělnosti čísel $n-1$ a $n-2$ plyne, že $n-1$ dělí t. Ze vztahu $t = b + a/n$ lze nyní i b vyjádřit pouze pomocí t a n jako

$$b = \frac{(n-1)^2+1}{n(n-1)}t.$$

Jak už víme, obě nesoudělná čísla n a $n-1$ dělí číslo t, takže je dělí i jejich součin, a proto $t \geqq n(n-1)$. S ohledem na $n \geqq 3$ tak získáváme odhad

$$b = (\underbrace{(n-1)^2}_{\geqq 4}+1)\cdot\underbrace{\left(\frac{t}{n(n-1)}\right)}_{\geqq 1} \geqq 5,$$

kde rovnost zřejmě nastává jedině pro $n = 3$ a $t = 6$. Pro taková n, t (odpovídající minimálnímu $b = 5$) z dříve odvozených vztahů dopočteme, že $a = 3$, $c = d = 4$. Zkouška díky uvedenému postupu není nutná.

Odpověď. Ve druhé místnosti muselo být minimálně pět předmětů a mohlo se tak stát pouze v případě $n = 3$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Přirozená čísla a, b nazveme nesoudělná, pokud je jejich největší společný dělitel roven 1, tedy $\operatorname{nsd}(a, b) = 1$. Připomeňte si základní vlastnosti nesoudělných čísel:
- (a) Po sobě jdoucí přirozená čísla jsou nesoudělná.
- (b) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\operatorname{nsd}(a, b) = 1$ a $b \mid ac$, pak platí i $b \mid c$.
- (c) Jsou-li $a, b, c \in \mathbb{N}$ a platí-li $\operatorname{nsd}(a, b) = 1$, $a \mid c$ a $b \mid c$, pak platí i $ab \mid c$.

N2. Řešte podobnou úlohu pro tři místnosti namísto čtyř.

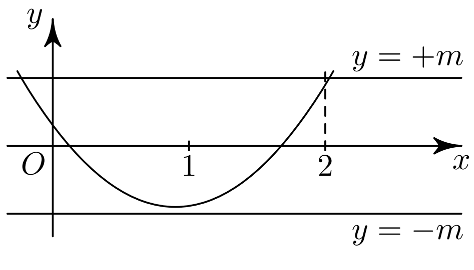
2. *Nalezněte nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost*

$$|x^2 + ax + b| \leqq m$$

platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$.

Řešení. Na úvod si uvědomme, že žádné záporné číslo m požadavkům úlohy zjevně nevyhovuje (absolutní hodnota je nezáporné číslo).

Úlohu interpretujme geometricky. Podmínka ze zadání říká, že graf nějaké kvadratické funkce $y = x^2 + ax + b$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ má ležet v horizontálním pásu mezi přímkami $y = +m$ a $y = -m$ (obr. 1). Otázka pak zní: Do jakého nejtenčího pásu tohoto druhu lze graf nějaké takové funkce na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ „sevřít“?



Obr. 1

Dobrým kandidátem na nejtenčí pás se podle obr. 1 zdá být funkce

$$f(x) = (x-1)^2 - \tfrac{1}{2} = x^2 - 2x + \tfrac{1}{2},$$

pro niž $a = -2$ a $b = \frac{1}{2}$ a která, jak hned ukážeme, na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ splňuje nerovnosti $-\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2}$.

Skutečně, díky vyjádření $f(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}$ se jedná o nerovnosti $0 \leqq (x-1)^2 \leqq 1$, jež platí zároveň právě pro $x \in \langle 0, 2\rangle$. Kvadratická funkce $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ tak vyhovuje podmínce úlohy pro $m = \frac{1}{2}$.

Ve druhé části řešení ukážeme, že pro žádné $m < \frac{1}{2}$ vyhovující kvadratická funkce neexistuje.

Klíčovým faktem pro nás bude, že pro libovolnou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ je alespoň jeden z rozdílů $f(0) - f(1)$ a $f(2) - f(1)$ větší či roven jedné. Odtud vyplyne, že šířka $2m$ svírajícího pásu[1] musí být větší nebo rovna jedné, a hodnoty $m < \frac{1}{2}$ tak skutečně lze vyloučit. Je-li totiž například $f(0) - f(1) \geqq 1$ (v případě $f(2) - f(1) \geqq 1$ bychom postupovali obdobně), obdržíme kýžený odhad $2m \geqq 1$ snadno z všeobecně platné trojúhelníkové nerovnosti $|a - b| \leqq |a| + |b|$:

$$1 \leqq |f(0) - f(1)| \leqq |f(0)| + |f(1)| \leqq 2m.$$

K zakončení celého řešení tedy zbývá dokázat platnost alespoň jedné z nerovností $f(0) - f(1) \geqq 1$ a $f(2) - f(1) \geqq 1$ pro libovolnou $f(x) = x^2 + ax + b$. Jelikož

$$f(0) = b, \quad f(1) = 1 + a + b, \quad f(2) = 4 + 2a + b,$$

platí

$$\begin{aligned} f(0) - f(1) &= -1 - a \geqq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \leqq -2,\\ f(2) - f(1) &= 3 + a \geqq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a \geqq -2. \end{aligned}$$

Alespoň jedna z nerovností $f(0) - f(1) \geqq 1$ či $f(2) - f(1) \geqq 1$ tedy platí vždy (bez ohledu na volbu čísel a, b).

Odpověď. Hledaná minimální hodnota m je $\frac{1}{2}$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž platí $|x^2 - 2| \leqq m$ pro každé $x \in \langle -2, 2\rangle$.

N2. Ukažte, že pro každou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ existují čísla $u, v \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = (x-u)^2 + v$. Graf každé takové funkce je tedy posunutím paraboly $y = x^2$.

N3. Jsou dána tři reálná čísla a, b, c, přičemž každá dvě se liší alespoň o 1. Ukažte, že pokud nějaké $m \in \mathbb{R}$ splňuje $|a| \leqq m$, $|b| \leqq m$, $|c| \leqq m$, pak $m \geqq 1$.

N4. Ukažte, že pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = x^2 + ax + b$ platí alespoň jedna z nerovností $f(-1) - f(0) \geqq 1$, $f(1) - f(0) \geqq 1$. Platí závěr i tehdy, pokud nahradíme trojici čísel -1, 0, 1 trojicí čísel $t-1$, t, $t+1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$?

D1. Rozhodněte, zda existují čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že rovnice $ax^2 + bx + c + t = 0$ má dva reálné kořeny, ať zvolíme parametr $t \in \mathbb{R}$ jakkoli.

D2. Buďte a, b, c reálná čísla. Dokažte, že alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (a-b)x + (b-c) &= 0,\\ x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0,\\ x^2 + (c-a)x + (a-b) &= 0, \end{aligned}$$

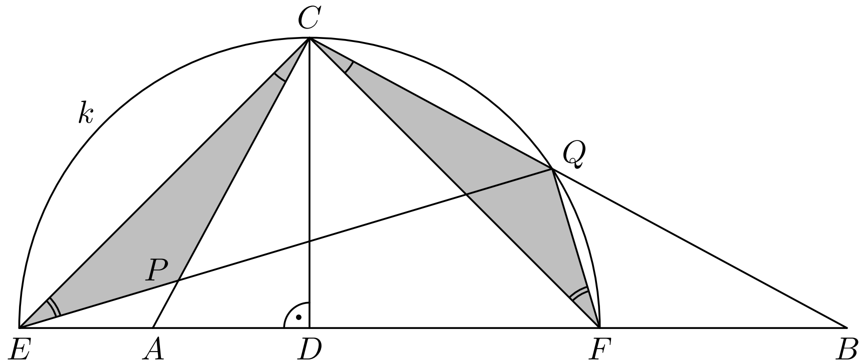
[1] Viz geometrickou interpretaci z úvodu řešení.

má reálný kořen. [Ruská MO 2007. Uvažte, že stačí, aby některá ze tří kvadratických funkcí z levých stran měla nekladnou hodnotu pro $x = 0$. Může se stát, že by hodnoty v nule vyšly všechny tři záporné?]

D3. Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou kvadratické trojčleny, pro které platí, že rovnice $P(Q(x)) = 0$ má kořeny -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice, víte-li, že je celočíselný. [Ukažte, že z hodnot $Q(-22)$, $Q(7)$, $Q(13)$ musejí být dvě shodné. Co to pak znamená pro osu souměrnosti paraboly — grafu funkce $Q(x)$?]

3. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a delší odvěsnou BC. Nechť D je pata výšky z vrcholu C. Kružnice k se středem D a poloměrem CD protíná odvěsnu BC v bodě Q a dále přímku AB v bodech E a F ($E \neq F$), kde F je bodem přepony AB. Úsečka QE protíná odvěsnu AC v bodě P. Dokažte, že $|PE| = |QF|$.*

Řešení. Vidíme, že daná kružnice k je Thaletovou kružnicí s průměrem EF a středem D (obr. 2). Přitom trojúhelník EFC je zřejmě pravoúhlý rovnoramenný, proto $|EC| = |FC|$. Ukážeme, že trojúhelníky EPC a FQC jsou shodné, čímž bude tvrzení úlohy dokázáno.



Obr. 2

Úhly CEQ a CFQ jsou shodné, neboť jde o obvodové úhly nad tětivou CQ kružnice k. Konečně oba úhly ECF a ACB jsou shodné (pravé), proto jsou shodné i jejich nepřekrývající se části, totiž úhly ECA a FCB (a tedy i úhly ECP a FCQ). Trojúhelníky EPC a FQC se tedy skutečně shodují podle věty *usu.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zopakujte si větu o středovém a obvodovém úhlu.

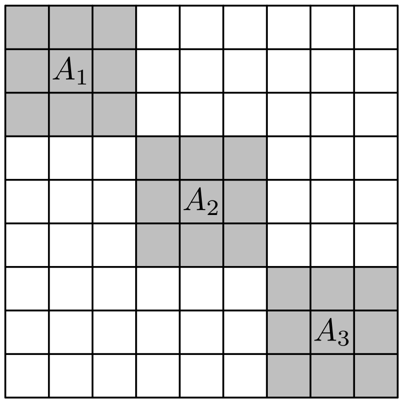
N2. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X tak, že $|\sphericalangle ADX| = 30°$. Průsečíky úseček XC a XD se stranou AB označme postupně Y a Z. Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku XYZ.

D1. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X. Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z. Ukažte, že $YZ \perp AC$. [Nalezněte skrytou čtveřici bodů, co leží na jedné kružnici.]

D2. Na stranách BC a CD čtverce $ABCD$ zvolme postupně body K a L tak, že $|\sphericalangle LAK| = 45°$. Ukažte, že $|BK| + |DL| = |KL|$. [Otočte bod K o $90°$ kolem A a užijte shodnosti vhodných trojúhelníků.]

4. *Nela s Janou zvolí přirozené číslo k a následně hrají hru s tabulkou o rozměrech 9×9. Začínající Nela pokaždé svým tahem vybere jedno prázdné políčko a vepíše do něj nulu. Zato Jana ve svém tahu do nějakého prázdného políčka napíše jedničku. Navíc po každém tahu Nely následuje k tahů Jany. Pokud se kdykoli během hry stane, že* *součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je lichý, vítězí Jana. Pokud dívky vyplní celou tabulku, aniž by se tak stalo, vítězí Nela. Nalezněte nejmenší hodnotu k, pro niž má Jana vítěznou strategii.*

Řešení. Ukažme nejprve, že v případě $k = 3$ vyhraje Jana. Pracujme se čtverci A_1, A_2 a A_3 o rozměrech 3×3 (obr. 3). Čtverec 3×3 považujeme za *pokrytý*, pokud se nachází v každém jeho řádku i sloupci právě jedna jednička. Pokud Jana pokryje čtverce A_1, A_2 a A_3, aniž zahraje do jiných čtverců, zajistí si výhru, neboť všechny řádkové i sloupcové součty budou rovny lichému číslu 1.



Obr. 3

Je zřejmé, že je-li po tahu Nely v některém čtverci 3×3 zapsána nejvýše jedna nula (a žádná jednička), může Jana díky hodnotě $k = 3$ tento čtverec trojicí svých tahů pokrýt. Strategie Jany je tedy následující: Pokud Nela svým tahem zahraje do některého nepokrytého čtverce A_1, A_2 nebo A_3, pokryje vzápětí Jana tento čtverec. V opačném případě pokryje Jana libovolný z dosud nepokrytých čtverců A_1, A_2 a A_3. Po prvních třech trojicích tahů Jana takto vždy zvítězí.

Tvrdíme, že v případech $k \in \{1, 2\}$ má vítěznou strategii Nela. Nejprve si uvědomme, že pokud nějaký tah nabízí Janě výhru (nazvěme jej *vítězný* tah), znamená to, že před jeho zahráním je lichý součet přesně v osmi sloupcích i osmi řádcích, přičemž onen vítězný tah je tahem Jany na průsečík jediného „sudého“ řádku s jediným „sudým“ sloupcem. Z toho vyplývá, že má-li kdy Jana vítězný tah, je pak takový tah přesně jeden.

Nyní je zřejmé, jak Nela dosáhne vítězství v případě $k = 1$. Má-li Jana po svém tahu k dispozici vítězný tah, Nela na ono políčko napíše nulu, a Jana tak o svoji (jedinou) možnost výhry v dalším tahu přijde. Nemá-li naopak Jana po svém tahu k dispozici vítězný tah, připíše Nela dalším tahem nulu kamkoli. Tím se součty v řádcích ani sloupcích nezmění, takže Jana dalším tahem nevyhraje. Takto Nela dosáhne vyplnění celé tabulky, aniž by Janě dovolila vyhrát.

V případě $k = 2$ bude hrát Nela podle stejné strategie jako při $k = 1$, a zabrání tak tomu, aby Jana mohla někdy zvítězit po prvním ze své dvojice tahů. V tom druhém ovšem Jana nikdy vyhrát nemůže, neboť po jeho zahrání bude v tabulce celkem sudý počet jedniček, a bude tak vyloučeno, že by lichý počet jedniček byl v každém z (lichého počtu) devíti řádků.

Odpověď. Nejmenší hodnota k, pro niž má Jana vítěznou strategii, je $k = 3$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Řešte danou hru nejprve v tabulce 3×3.

N2. Na kouzelném stromě vyrostlo 25 citronů a 30 pomerančů. Sadař utrhne každý den dva plody, poté přes noc vždy na stromě vyroste jeden nový plod, a to pomeranč (resp. citron), byly-li utržené plody stejné (resp. různé). Jaký plod vyroste na stromě poslední? [Citron — jejich počet je totiž po každé noci lichý.]

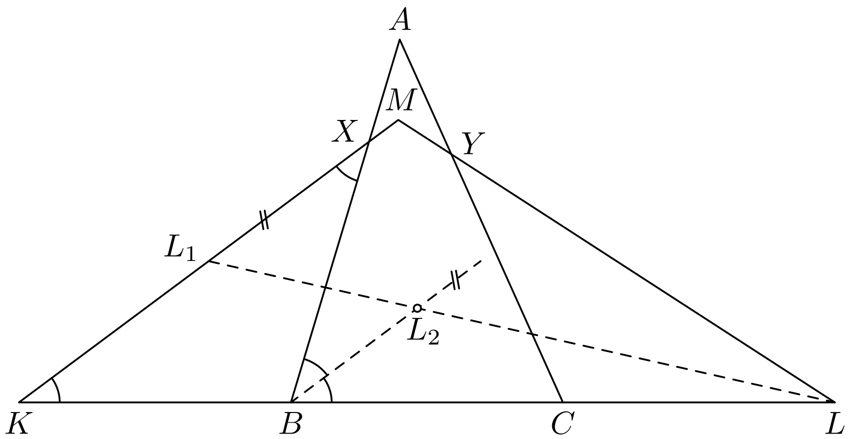
D1. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leqq k \leqq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii. [64–C–I–3]

D2. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka krále. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál. Ukažte, že hráč hrající jako první má vítěznou strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×1 a nalezněte pro prvního hráče strategii, v níž do žádného obdélníčku netáhne jako první.]

D3. V levém horním rohu šachovnice 8×8 stojí figurka koně. Dva hráči se střídají v tazích, přičemž každý svým tahem (legálním šachovým tahem) posune figurku na místo, na němž ještě nestála. Kdo nemá kam táhnout, prohrál. Ukažte, že začínající hráč má vyhrávající strategii. [Rozdělte šachovnici na obdélníčky 2×4 a v nich políčka rozdělte do dvojic se stejným úmyslem jako v úloze D2.]

5. *Je dán trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC a na polopřímkách opačných k polopřímkám BC, CB zvolme postupně body X, Y, K, L tak, aby platilo $|BX| = |BK| = |BC| = |CY| = |CL|$. Přímky KX a LY se protínají v bodě M. Dokažte, že těžiště trojúhelníku KLM splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.*

Řešení. Protože úhel ABC je vnějším úhlem rovnoramenného trojúhelníku XKB s hlavním vrcholem B (obr. 4), je zřejmě přímka KX rovnoběžná s osou úhlu ABC.



Obr. 4

Z hodnoty poměru $|LB| : |LK| = 2 : 3$ pak ovšem vyplývá, že zmíněná osa úhlu ABC prochází těžištěm trojúhelníku KLM. Pokud totiž označíme LL_1 jeho těžnici a L_2 její průsečík s osou úhlu ABC, pak z podobnosti trojúhelníků $\triangle LBL_2 \sim \triangle LKL_1$ (podle věty *uu*) získáme

$$\frac{|LL_2|}{|LL_1|} = \frac{|LB|}{|LK|} = \frac{2}{3}.$$

Bod L_2 tedy leží ve dvou třetinách těžnice LL_1 od vrcholu L, takže je skutečně těžištěm trojúhelníku KLM.

Ze symetrie zadání úlohy plyne, že také osa úhlu BCA prochází těžištěm trojúhelníku KLM. Jelikož průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku je středem jeho kružnice vepsané, je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že v každém trojúhelníku ABC je osa vnitřního úhlu kolmá na osu vnějšího úhlu u téhož vrcholu.

N2. Je dán trojúhelník ABC a jeho těžiště T. Rovnoběžka se stranou BC vedená bodem T oddělí menší trojúhelník ADE. Určete, jaký je poměr obsahů trojúhelníků ABC a ADE.

D1. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a I_a střed kružnice připsané straně BC. Ukažte, že
- (a) body B, C, I, I_a leží na kružnici s průměrem II_a [užijte výsledek úlohy N1],
- (b) střed úsečky II_a leží na ose úsečky BC,
- (c) body dotyku kružnice vepsané a kružnice připsané straně BC se stranou BC jsou souměrně sdružené podle osy úsečky BC.

D2. Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C. Osa o_1 úsečky AC protíná stranu AB v bodě K, osa o_2 úsečky BC protíná stranu AB v bodě L. Průsečík os o_1 a o_2 označme O. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku KLC leží na kružnici opsané trojúhelníku OKL. [64–A–II–1]

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

6. *Na tabuli je napsán součin*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Pro která přirozená čísla $n \geqq 2$ je možno za některé z činitelů dopsat vykřičník, a nahradit je tak jejich faktoriály, aby výsledný součin byl roven druhé mocnině přirozeného čísla?

Řešení. Podobně jako v návodných úlohách budeme značit exponent (případně nulový) u prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n jako $v_p(n)$. Uvědomme si několik zřejmých poznatků:

- ▷ Pro všechna m, n a každé prvočíslo p platí $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.
- ▷ Pro každé prvočíslo p platí $v_p(p!) = v_p(p) = 1$.
- ▷ Pro každé prvočíslo p platí $v_p((p+1)!) = 1$, $v_p(p+1) = 0$.
- ▷ Pro každé prvočíslo p a každé $n < p$ platí $v_p(n!) = v_p(n) = 0$.
- ▷ Číslo n je druhou mocninou přirozeného čísla, právě když $v_p(n)$ je sudé[2] pro každé prvočíslo p.

Označme $S = n!$ počáteční hodnotu součinu na tabuli a S' jeho konečnou hodnotu po dopsání faktoriálů. Díky uvedeným vlastnostem funkcí v_p je jasné, že pokud je n rovno nějakému prvočíslu p, pak bude platit $v_p(S) = v_p(p!) = 1$ stejně jako $v_p(S') = 1$, neboť připisování faktoriálů zastoupení prvočísla $p = n$ v součinu čísel na tabuli nezvýší. Číslo $v_p(S')$ tak bude liché, a proto S' nebude druhou mocninou přirozeného čísla.

Ve druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že dané číslo $n \geqq 2$ není prvočíslo (takže $n \geqq 4$), a ukážeme, že faktoriály můžeme připsat tak, aby výsledný součin

$$S' = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n,$$

kde f_k je jedno z čísel k nebo $k!$ pro každé k, byl druhou mocninou přirozeného čísla. To, jak víme, nastane, právě když v součinu S' bude každé prvočíslo p zastoupeno se sudým

[2] Za sudé číslo považujeme i nulu.

exponentem $v_p(S')$. Protože samo n dle předpokladu prvočíslo není, součin S' jistě obsahuje pouze prvočísla menší než n. Jelikož každé takové prvočíslo p není zastoupeno v činitelích $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}$ vůbec a v činiteli f_p právě jednou, příslušný mocnitel $v_p(S')$ je stejný jako mocnitel daného prvočísla p ve „zkráceném“ součinu

$$p \cdot f_{p+1} \cdot f_{p+2} \cdot \ldots \cdot f_n. \tag{1}$$

Jak tedy zajistit, aby každé prvočíslo $p < n$ bylo v odpovídajícím součinu (1) zastoupeno se sudým exponentem? Protože v druhém činiteli f_{p+1} z (1) je prvočíslo p zastoupeno buď jednou (to když $f_{p+1} = (p+1)!$), nebo zastoupeno vůbec není (je-li naopak $f_{p+1} = p + 1$), „správné“ zastoupení p v součinu (1) můžeme zajistit volbou hodnoty f_{p+1}, ať jsou následující hodnoty $f_{p+2}, \dots, f_n$ zadány jakkoli.[3]

Z předchozí úvahy už plyne konstrukce požadovaného výběru faktoriálů. Nejprve libovolně zvolíme hodnoty $f_k \in \{k, k!\}$ pro všechna taková $k \leqq n$, pro něž číslo $k-1$ *není prvočíslo*. Ostatní hodnoty f_k, tedy hodnoty f_{p+1}, kde p je libovolné prvočíslo menší než n, pak budeme volit „odzadu“, tj. od největšího takového p po nejmenší.[4] Vždy, když bude pro některé prvočíslo $p < n$ na řadě volba hodnoty f_{p+1}, tedy druhého činitele v součinu (1), budou již jeho ostatní činitelé určeni, a tak volbu f_{p+1} provedeme „správně“ ve smyslu předchozího odstavce.

Tím je konstrukce druhé mocniny S' završena a řešení celé úlohy hotovo.

Odpověď. Hledaná $n \geqq 2$ jsou právě všechna složená čísla.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jaký nejmenší násobek čísla 2016 je druhou mocninou přirozeného čísla?

N2. Pro jaké nejmenší přirozené číslo n platí $2015 \mid n!$?

N3. Kolika nulami končí číslo 2015!?

N4. Pro dané přirozené číslo n a prvočíslo p uvažme největší nezáporné celé číslo k, pro něž platí $p^k \mid n$. Toto číslo k budeme značit $v_p(n)$ a říkat mu p-valuace čísla n. Jiný pohled na věc je, že $v_p(n)$ značí exponent u prvočísla p v prvočíselném rozkladu čísla n. Pro libovolná přirozená čísla a, b ukažte následující:

(a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

(b) $v_p(a^b) = bv_p(a)$.

(c) Přirozené číslo b je druhou mocninou, právě když $v_p(b)$ je sudé pro každé prvočíslo p.

(d) $a \mid b$, právě když $v_p(a) \leqq v_p(b)$ pro každé prvočíslo p.

(e) Je-li $v_p(a) \neq v_p(b)$, pak platí $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.

D1. Zjistěte, pro která přirozená čísla $n \geqq 2$ je možno za některé z činitelů součinu

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

dopsat vykřičník tak, aby výsledný součin nebo jeho dvojnásobek byl roven *třetí* mocnině přirozeného čísla. [Hledaná jsou právě ta složená n, pro něž je i číslo $n-1$ složené.]

D2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n a libovolné prvočíslo p platí vzorec

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \ldots .$$

D3. Ukažte, že

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

[3] Platí to samozřejmě i pro případné prvočíslo $p = n - 1$, kdy je činitel $f_{p+1} = f_n$ v součinu (1) poslední; tehdy musíme přirozeně volit $f_n = n!$.

[4] Poslední tak bude volba f_3 odpovídající nejmenšímu prvočíslu $p = 2$.

kde $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p. [Zapište n v soustavě o základu p jako $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k$, užijte výsledku D2 a u jednotlivých koeficientů pak sečtěte geometrickou posloupnost mocnin p.]

D4. Nalezněte všechna n přirozená, pro něž $2^{n-1} \mid n!$ [Užijte výsledku předchozí úlohy.]

D5. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n je výraz

$$\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(m+n)!}$$

vždy roven celému číslu. [MMO 1972]

D6. Ukažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n platí

$$v_p\left(\binom{n+m}{m}\right) = \frac{s_p(n) + s_p(m) - s_p(m+n)}{p-1},$$

kde opět $s_p(n)$ je ciferný součet čísla n zapsaného v soustavě o základu p. Souvisí výsledek s počtem „přenosů" při písemném sčítání v soustavě o základu p?