65. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Pro přirozená čísla k, l, m platí*

$$\frac{k+m+klm}{lm+1}=\frac{2\,051}{404}.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu klm.

Řešení. I když rovnice v zadání obsahuje tři neznámé, podaří se nám ji jednoznačně vyřešit díky tomu, že hledáme řešení pouze v množině přirozených čísel. Pokusíme se z obou zlomků oddělit jejich celou část (což je v případě číselného zlomku snadné):

$$\frac{k+m+klm}{lm+1}=\frac{k\,(1+lm)+m}{lm+1}=k+\frac{m}{lm+1},\qquad \frac{2\,051}{404}=5\,\frac{31}{404}. \tag{1}$$

Protože $0<m<lm+1$, je

$$0<\frac{m}{lm+1}<1,$$

a proto musí být $k=5$. Z rovností (1) tak pro zlomkové části obou čísel dostáváme

$$\frac{m}{lm+1}=\frac{31}{404}. \tag{2}$$

Zlomek na pravé straně (2) je v základním tvaru a podobně i zlomek na levé straně (čísla m a $lm+1$ jsou zjevně nesoudělná). Z této rovnosti zlomků tak vychází rovnost čitatelů i jmenovatelů: $m=31$ a $lm+1=404$, odkud už snadno dopočítáme $l=13$. Součin klm tak může nabývat jediné hodnoty $5\cdot 13\cdot 31=2\,015$.

Jiné řešení. Z předchozího řešení využijeme úvodní postup a rovnici (2) přepíšeme s převrácenými zlomky jako

$$\frac{lm+1}{m}=\frac{404}{31}.$$

Nyní zopakujeme postup z počátku předešlého řešení a z obou zlomků oddělíme jejich celou část:

$$\frac{lm+1}{m}=l+\frac{1}{m},\qquad \frac{404}{31}=13\,\frac{1}{31}.$$

Odtud vidíme, že je nutně $l=13$ a $m=31$.

Jiné řešení. Ze zadané rovnice vyjádříme neznámou k pomocí neznámých l a m, v prvním kroku se přitom zbavíme zlomků vynásobením oběma jmenovateli:

$$\begin{aligned} 404(k+m+klm)&=2\,051(lm+1),\\ 404k(lm+1)+404m&=2\,051(lm+1),\\ k&=\frac{2\,051(lm+1)-404m}{404(lm+1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zlomek na pravé straně musí být přirozené číslo, zkoumejme tedy, zda oba činitelé v jeho jmenovateli (404 i $lm+1$) dělí jeho čitatele. Čísla $2\,051 = 5 \cdot 404 + 31$ a 404 jsou nesoudělná a $404m$ je zřejmě dělitelné číslem 404, proto 404 musí dělit $lm+1$.

Podobně čísla $lm+1$ a m jsou nesoudělná, tudíž $lm+1$ musí v čitateli dělit číslo 404. Jestliže se dvě přirozená čísla dělí navzájem, musejí být stejná.[1] Dostáváme tak rovnost $lm+1 = 404$, která po dosazení do (3) dává

$$k = \frac{2\,051 \cdot 404 - 404m}{404 \cdot 404} = \frac{2\,051 - m}{404}. \tag{4}$$

Z rovnosti $lm+1 = 404$ ovšem také vyplývá, že $m < 404$. Navíc číslo k je přirozené, takže m může být pouze zbytek při dělení čísla 2 051 číslem 404, tj. $m = 31$. Zpětným dosazením do (4) dostaneme $k = 5$ a z rovnice $lm + 1 = 31l + 1 = 404$ vyjde $l = 403/31 = 13$. Jediné vyhovující řešení je $(k, l, m) = (5, 13, 31)$, a tedy $klm = 2\,015$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V přirozených číslech řešte rovnici $\frac{1}{p+1/q} = \frac{2015}{2016}$. [$p = 1$, $q = 2\,015$]

N2. Připomeňte si důležitý poznatek o dělitelnosti celých čísel: dělí-li číslo x součin yz a jsou-li přitom čísla x a y nesoudělná, pak číslo x dělí samo číslo z. Využijte pak toto pravidlo ke zdůvodnění takového závěru: pokud pro přirozená čísla a, b, c, d jsou oba zlomky $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ v základním tvaru, platí $a = c$ a $b = d$.

N3. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, k, l platí, že ka dělí b a lb dělí a, pak $k = l = 1$ a $a = b$. [Dělitel nemůže být (v absolutní hodnotě) větší než dělenec, proto $ka \leqq b$ a $lb \leqq a$, takže $kla \leqq lb \leqq a$, tedy $kl \leqq 1$ a odtud $k = l = 1$. Nakonec zpětně $a \leqq b \leqq a$, což nastává, pouze pokud $a = b$.]

D1. Najděte alespoň jedno řešení rovnice

$$\frac{k+m+klm}{lm+1} = \frac{2051}{404}$$

v racionálních číslech, pro které je hodnota součinu klm rovna 2 016. [Dosazením $klm = 2\,016$ a $lm = 2\,016/k$ dostaneme volbou $k = 1$ jedno z řešení $(k, l, m) = (1, 2\,016 \cdot 404/(1\,647 \cdot 2\,017), 2\,017 \cdot 1\,647/404)$.]

2. *Do čtvercové tabulky* 11×11 *jsme vepsali přirozená čísla* $1, 2, \ldots, 121$ *postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou* 4×4 *jsme všemi možnými způsoby zakryli právě* 16 *políček. Kolikrát byl součet zakrytých* 16 *čísel druhou mocninou celého čísla?*

Řešení. Označme číslo, které zakrývá levý horní roh destičky, jako z. Celá destička musí ležet uvnitř dané tabulky, proto hodnoty z mohou být jen čísla vepsaná v prvních osmi řádcích a v prvních osmi sloupcích tabulky (pokud by bylo například $z = 10$, destička by přečnívala, tudíž by nemohla zakrývat 16 čísel tabulky).

Prvních 8 řádků tabulky obsahuje čísla od 1 do 88, z nich musíme ještě vyloučit čísla v posledních třech sloupcích. Všimněme si, že čísla v každém sloupci dávají při dělení jedenácti stejný zbytek. Poslední tři sloupce zleva (= první tři zprava) tak obsahují čísla, která při dělení jedenácti dávají zbytky 9, 10 a 0; jsou to čísla 9, 10, 11 (první řádek), 20, 21, 22 (druhý řádek), atd. až 86, 87, 88 (osmý řádek).

Takto připraveni můžeme vypočítat součet čísel, která destička zakryje. Zakrytá čísla jsou z, $z+1$, $z+2$, $z+3$ (první řádek destičky), $z+11$, $z+12$, $z+13$, $z+14$

[1] Jestliže přirozené číslo a dělí přirozené číslo b, je $a \leqq b$.

(druhý řádek destičky), $z+22$, $z+23$, $z+24$, $z+25$ (třetí řádek destičky) a $z+33$, $z+34$, $z+35$, $z+36$ (čtvrtý řádek destičky) a jejich součet je

$$16z+288=16(z+18)=4^2(z+18).$$

Pokud je tento součet druhou mocninou nějakého celého čísla, musí být $z+18$ druhou mocninou nějakého celého čísla n. Už víme, že $1 \leqq z \leqq 88$, a tedy $19 \leqq z+18 = n^2 \leqq 18+88=106$. Tím zajistíme, že horní levý roh destičky položíme na políčko v prvních osmi řádcích. Pro přirozené číslo n, kde $19 \leqq n^2 \leqq 106$, přicházejí v úvahu hodnoty $n \in \{5,6,7,8,9,10\}$. Dopočítáním hodnot $z=n^2-18$ dostáváme odpovídající $z \in \{7,18,31,46,63,82\}$.

Musíme ještě prověřit, zda některé z těchto čísel neleží v posledních třech sloupcích tabulky. Dopočítáme proto zbytky čísel při dělení jedenácti a zjistíme, že musíme dodatečně vyloučit hodnotu $z=31$ se zbytkem 9.

Destičku lze položit požadovaným způsobem na pět různých pozic, které charakterizuje číslo zakryté levým horním rohem destičky, a to $z \in \{7,18,46,63,82\}$. V těchto případech bude součet čísel zakrytých políček $16(z+18) \in \{16\cdot 25, 16\cdot 36, 16\cdot 64, 16\cdot 81, 16\cdot 100\}$.

Jiné řešení. Pokud položíme destičku na tabulku tak, že levý horní roh destičky zakrývá číslo 1, bude součet zakrytých čísel

$$s=1+2+3+4+12+13+14+15+23+24+25+26+34+35+36+37=304=16\cdot 19.$$

Aby destička zůstala ležet celá na čtvercové tabulce, můžeme destičku posunout nejvýše o 8 sloupců doprava a podobně nejvýše o 8 řádků dolů. Při každém posunutí destičky doprava o jeden sloupec se každé zakryté číslo zvětší o 1, takže součet čísel zakrytých destičkou se zvýší o 16. Podobně uvážíme, co způsobí posun destičky o jeden řádek dolů — tehdy se každé zakryté číslo zvětší o 11, a součet všech zakrytých políček se tudíž zvětší o $11\cdot 16$.

Číslo s je tedy dělitelné 16 a každý pohyb destičky dělitelnost 16 zachová, proto bude součet čísel zakrytých destičkou vždy dělitelný 16. Má-li být tento součet druhou mocninou celého čísla, bude to právě tehdy, bude-li i jeho šestnáctina druhou mocninou celého čísla (protože $16=4^2$). Stačí tedy uvažovat pouze šestnáctiny součtů čísel zakrytých destičkou.

Nyní vytvoříme tabulku 8×8, do jejíchž polí vypíšeme šestnáctiny součtů čísel zakrytých destičkou s levým horním polem zakrývajícím odpovídající pole dané tabulky. V její levém horním rohu bude číslo 19 ($=\frac{1}{16}\cdot 304$), při pohybu doprava zvětšíme číslo o 1 a při pohybu dolů o 11:

19	20	21	22	23	24	**25**	26
30	31	32	33	34	35	**36**	37
41	42	43	44	45	46	47	48
52	53	54	55	56	57	58	59
63	**64**	65	66	67	68	69	70
74	75	76	77	78	79	80	**81**
85	86	87	88	89	90	91	92
96	97	98	99	**100**	101	102	103

Nakonec stačí spočítat, kolik z těchto čísel je druhou mocninou celého čísla. Takových čísel je právě pět a jsou zvýrazněna polotučným písmem (25, 36, 64, 81 a 100).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Do čtvercové tabulky velikosti 5×5 jsme vepsali přirozená čísla $1, 2, \dots, 25$ postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou velikosti 2×2 jsme všemi možnými způsoby zakryli čtyři políčka.
   1. Jaký nejmenší a jaký největší součet mohou mít čtyři zakrytá čísla? [16, 88]
   2. Kolika způsoby můžeme takto destičku položit? [16]
   3. Bude součet čtyř zakrytých čísel vždy dělitelný čtyřmi? [Ano]
   4. Kolikrát bude součet zakrytých čtyř čísel druhou mocninou celého čísla? [3krát]

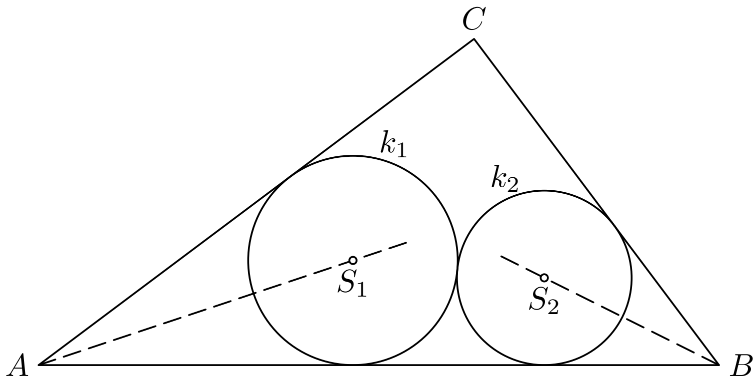
N2. Do políček čtvercové tabulky 11×11 jsme postupně zleva doprava a shora dolů zapsali čísla $1, 2, \dots, 121$. Čtvercovou destičkou velikosti 3×3 jsme všemi možnými způsoby zakryli přesně devět políček. V kolika případech byl součet devíti zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? [62–B–S–2]

D1. V jednom poli šachovnice 8×8 je napsáno „−“ a v ostatních polích „+“. V jednom kroku můžeme změnit na opačná zároveň všechna čtyři znaménka v kterémkoli čtverci 2×2 na šachovnici. Rozhodněte, zda po určitém počtu kroků může být na šachovnici obou znamének stejný počet. [64–C–II–2]

D2. V každém políčku tabulky 8×8 je napsáno jedno nezáporné celé číslo tak, že každá dvě čísla, která jsou na políčkách souměrně sdružených podle jedné nebo druhé úhlopříčky, jsou stejná. Součet všech 64 čísel je 1 000, součet 16 čísel na úhlopříčkách je 200. Ukažte, že součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky je nejvýše 300. Platí stejný závěr i pro číslo 299? [63–B–II–4]

3. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ cm a $|BC| = 3$ cm leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC, zatímco k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu poloměru r_2.*

Řešení. Mějme takové dvě kružnice, jež splňují předpoklady úlohy (obr. 1). Zřejmě střed S_1 leží na ose úhlu BAC a střed S_2 na ose úhlu ABC. Dále si uvědomíme, že



Obr. 1

velikost poloměru r_1 kružnice k_1 je přímo úměrná délce úsečky AS_1 a podobně velikost r_2 přímo úměrná délce úsečky BS_2. Zvětšíme-li poloměr jedné z kružnic, musí se nutně poloměr druhé kružnice zmenšit.

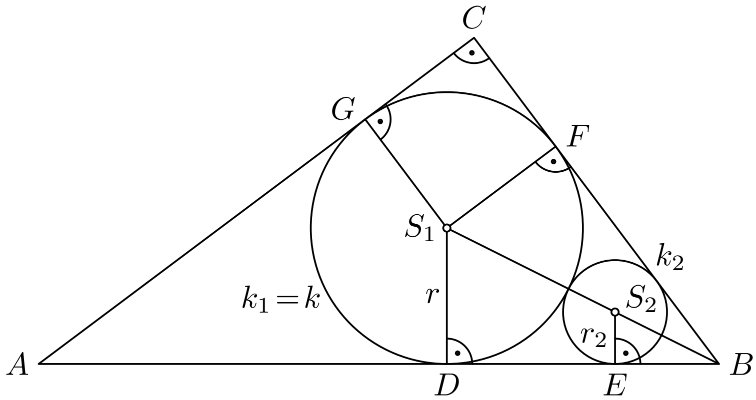
Kružnice k_2 nemůže mít poloměr větší než největší kružnice, kterou lze trojúhelníku ABC vepsat. Takovou kružnicí je zřejmě kružnice k trojúhelníku ABC vepsaná. A naopak nejmenší poloměr bude mít kružnice k_2, pokud zvolíme $k_1 = k$. (Že v obou popsaných případech pro $k_2 = k$ i pro $k_1 = k$ existuje příslušná „vepsaná“ kružnice k_1, resp. k_2, je vcelku zřejmé.)

Stačí tedy vypočítat poloměr r kružnice k trojúhelníku ABC vepsané a poloměr kružnice k_2, jež se dotýká kružnice k a stran AB a BC daného trojúhelníku.

Poloměr r vepsané kružnice vypočteme například ze vzorce $2S_{ABC} = ro$, kde S_{ABC} značí obsah trojúhelníku ABC a o jeho obvod.[2] Obsah daného pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB je při obvyklém označení délek stran roven $\frac{1}{2}ab$. Přepona v trojúhelníku ABC má (v centimetrech) podle Pythagorovy věty velikost $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Maximální poloměr kružnice k_2 je tedy

$$r = \frac{2S_{ABC}}{o} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{3\cdot 4}{3+4+5} = 1.$$

K výpočtu poloměru r_2 kružnice k_2, jež se dotýká kružnice k a stran AB a BC, označme D a E body, v nichž se kružnice k a k_2 dotýkají strany AB, a F, G dotykové body kružnice k po řadě se stranami BC a AC (obr. 2). Protože daný trojúhelník je



Obr. 2

pravoúhlý, je S_1FCG čtverec o straně délky $r = 1$, takže $|BF| = |BD| = 2$ a podle Pythagorovy věty $|BS_1| = \sqrt{5}$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BES_2 a BDS_1 pak plyne

$$\frac{r_2}{|BS_2|} = \frac{r}{|BS_1|} \quad \text{neboli} \quad \frac{r_2}{\sqrt{5}-r_2-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Po úpravě tak pro hledanou hodnotu neznámé r_2 dostaneme lineární rovnici

$$r_2\bigl(\sqrt{5}+1\bigr) = \sqrt{5}-1,$$

kterou ještě zjednodušíme vynásobením $\sqrt{5}-1$. Zjistíme tak, že nejmenší možná hodnota poloměru kružnice k_2 je rovna

$$r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ se navzájem vně dotýkají, jejich společnou vnější tečnu označme P_1P_2, přičemž $P_1 \in k_1$ a $P_2 \in k_2$. Přesvědčte se, že platí $(r_1+r_2)^2 = |P_1P_2|^2 + (r_1-r_2)^2$. [Rovnice je Pythagorova věta pro pravoúhlý trojúhelník s přeponou S_1S_2.]

N2. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, AC, AB postupně v bodech K, L, M. Dokažte rovnosti $|AL| = |AM| = \frac{1}{2}(|AB|+|AC|-|BC|)$, $|BK| = |BM| = \frac{1}{2}(|BC|+|AB|-|AC|)$ a $|CK| = |CL| = \frac{1}{2}(|AC|+|BC|-|AB|)$.

[2] Jiný postup využívající pravoúhlost trojúhelníku ABC je předmětem doplňkové úlohy.

[Body dotyku vepsané kružnice se stranami rozdělují hranici trojúhelníku na tři dvojice úseček stejných délek.]

D1. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c je průměr vepsané kružnice roven $a + b - c$. [Jsou-li D a E postupně body dotyku vepsané kružnice o středu S s odvěsnami BC a AC, je $SDCE$ čtverec, takže $|CD| = \frac{1}{2}(a + b - c) = |SD| = r$.]

D2. Poloměr vepsané kružnice trojúhelníku ABC je r. Sestrojme tři různé tečny vepsané kružnice rovnoběžné se stranami trojúhelníku. Poloměry vepsaných kružnic tří malých „odříznutých“ trojúhelníků označme r_A, r_B, r_C podle vrcholů trojúhelníku. Dokažte, že $r_A + r_B + r_C = r$. [Z podobnosti malého trojúhelníku k ABC je $r_A/r = (v_a - 2r)/v_a$, kde v_a značí velikost výšky z vrcholu A v trojúhelníku ABC. Podobné rovnice platí i pro ostatní vrcholy, takže zbývá ukázat, že $1/v_a + 1/v_b + 1/v_c = 1/r$. Zde využijeme vzorce $ro = 2S = av_a = bv_b = cv_c$, kde $o = a + b + c$.]

4. *Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi.*

Řešení. Označme n hledané číslo a nechť 2^k je nejvyšší mocnina dvojky, která číslo n dělí. Ke každému lichému děliteli d čísla n (včetně $d = 1$) můžeme přiřadit právě k různých sudých dělitelů $2d, 2^2d, \ldots, 2^kd$. Dostaneme tak všechny sudé dělitele čísla n; navíc různým lichým dělitelům přiřadíme různé sudé dělitele (protože z rovnice $2^{k_1}d_1 = 2^{k_2}d_2$ pro přirozená čísla k_1, k_2, d_1, d_2, přičemž d_1 a d_2 jsou lichá, vyplývá, že $d_1 = d_2$ a $k_1 = k_2$). Vidíme tak, že pokud má číslo n právě N lichých dělitelů, má právě kN dělitelů sudých.

Podle zadání má platit $kN = N + 3$ neboli $N(k-1) = 3$. Číslo 1 je lichým dělitelem každého přirozeného čísla, proto $N \geqq 1$. Máme tedy pouze dvě možnosti:

1. $N = 1$ a $k - 1 = 3$.
   V tomto případě má n jediného lichého dělitele, a je tedy mocninou dvojky. Navíc nejvyšší mocnina, která je dělí, je $2^k = 2^4 = 16$, tudíž $n = 16$. Sudí dělitelé čísla 16 jsou 2, 4, 8 a 16, hledaný podíl je
   $$\frac{2 + 4 + 8 + 16}{1} = 30.$$
2. $N = 3$ a $k - 1 = 1$.
   V tomto případě má n tři liché dělitele a nejvyšší mocnina dvojky, která je dělí, je $2^k = 2^2 = 4$. Pokud by mělo číslo n ve svém prvočíselném rozkladu dvě různá lichá prvočísla p a q, mělo by alespoň čtyři liché dělitele 1, p, q a pq, což je spor. Číslo n je tedy dělitelné jediným lichým prvočíslem p. Je proto $n = 4p^\alpha$ pro vhodné $\alpha \geqq 1$, takže číslo n má celkem $\alpha + 1$ lichých dělitelů $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. Proto musí být $\alpha = 2$. Pro $n = 4p^2$ je tak hledaný podíl roven
   $$\frac{2 + 2p + 2p^2 + 4 + 4p + 4p^2}{1 + p + p^2} = \frac{(2 + 4)(1 + p + p^2)}{1 + p + p^2} = 6.$$

Hledaný podíl může být 30 (pro $n = 16$) nebo 6 (pro $n = 4p^2$, kde p je libovolné liché prvočíslo).

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení označme n hledané přirozené číslo a největší mocninu dvojky, která je dělí, označme 2^k. Z předešlého řešení už víme, že všechny sudé dělitele čísla n můžeme rozdělit do k-členných skupin $2d, 2^2d, \ldots, 2^kd$, kde

d je libovolný lichý dělitel čísla n. Součet sudých dělitelů v každé z vypsaných skupin se dá vyjádřit jako násobek příslušného d, totiž

$$2d + 2^2 d + \ldots + 2^k d = (2 + 2^2 + \ldots + 2^k)d = \\ = \left(\frac{2^{k+1}-1}{2-1} - 1\right) d = (2^{k+1}-2)d.$$

Stejný činitel $2^{k+1}-2$ dostaneme pro každého lichého dělitele čísla n, proto součet všech sudých dělitelů čísla n je vždy $(2^{k+1}-2)$-násobkem součtu všech jeho lichých dělitelů.

Zbývá najít možné hodnoty k a poté ukázat, že k nim existuje odpovídající číslo n. Možné hodnoty k určíme stejně jako v předešlém řešení z rovnice $N(k-1) = 3$, kde N je počet lichých dělitelů čísla n. Dostáváme tak $k = 2$ ($N = 3$ a hledaný podíl je $2^3 - 2 = 6$) a $k = 4$ ($N = 1$ a hledaný podíl je $2^5 - 2 = 30$). Pro $k = 2$ pak hledáme násobek 4 se třemi lichými děliteli — tomu vyhovuje například $n = 4 \cdot 9 = 36$ s třemi lichými děliteli 1, 3 a 9 — a pro $k = 4$ zřejmě vyhovuje $n = 16$ s jediným lichým dělitelem.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má právě tři dělitele. Jak se změní odpověď, hledáme-li nejmenší trojmístné liché číslo s právě třemi děliteli? [4; 121]

N2. Najděte všechna přirozená čísla, která mají stejný počet sudých i lichých dělitelů. [$2m$, kde m je libovolné liché číslo]

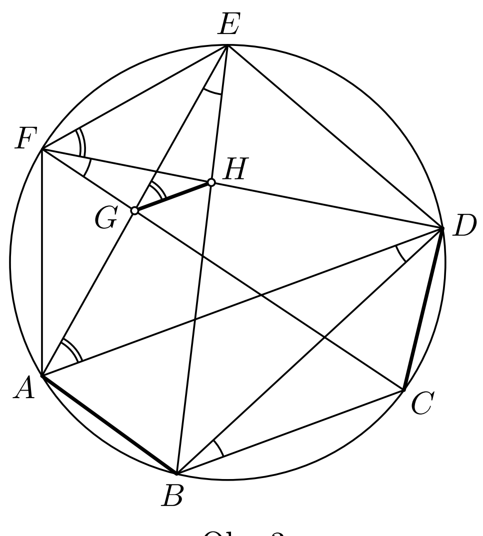
D1. Nechť m je přirozené číslo, které má sedm kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má devět kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$? [64–B–I–4]

D2. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla n je 20^{15}. Určete n. [64–B–II–1]

5. *Vrcholy konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ leží na kružnici, přičemž $|AB| = |CD|$. Úsečky AE a CF se protínají v bodě G a úsečky BE a DF se protínají v bodě H. Dokažte, že úsečky GH, AD a BC jsou navzájem rovnoběžné.*

Řešení. Nejprve ukážeme, že $AD \parallel BC$. Protože $|AB| = |CD|$, jsou obvodové úhly nad tětivami AB a CD kružnice opsané šestiúhelníku $ABCDEF$ shodné (obr. 3), tedy $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBC|$; to jsou však střídavé úhly příčky BD přímek AD a BC, proto $AD \parallel BC$.

Zbývá ukázat, že $GH \parallel AD$. Využitím shodných obvodových úhlů nad tětivami AB



Obr. 3

a CD při vrcholech E a F dostáváme

$$|\sphericalangle GEH| = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle GFH|,$$

což znamená, že body E, F, G a H leží na téže kružnici, neboť vrcholy shodných úhlů GEH a GFH leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou GH. Odtud plyne, že úhly EFH a EGH nad její tětivou EH jsou shodné. To spolu se shodností úhlů EFD a EAD nad tětivou ED původní kružnice (obr. 3) vede ke shodnosti souhlasných úhlů EGH a EAD příčky AE přímek GH a AD, jež jsou tudíž skutečně rovnoběžné. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ukažte, že tětivový lichoběžník je rovnoramenný. [Osy obou rovnoběžných základen lichoběžníku procházejí středem opsané kružnice, jsou tedy shodné.]

N2. Ukažte, že pokud dvě různoběžné protilehlé strany tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku, je čtyřúhelník lichoběžníkem. [Jsou-li shodné strany AB a CD, uvažme osu o úsečky BC, ta prochází středem S opsané kružnice. Rovnoramenné trojúhelníky ABS a CDS jsou shodné, a tudíž souměrně sdružené podle osy o.]

D1. Je dána tětiva AB kružnice k se středem v bodě S. Na úsečce AB zvolme bod M a průsečík kružnice opsané trojúhelníku AMS s kružnicí k označme C. Dokažte, že úhly MCS a MBS jsou shodné. [Stačí využít rovnost úhlů v rovnoramenném trojúhelníku ABS a obvodové úhly nad MS v kružnici opsané trojúhelníku AMS.]

D2. Ve vnější oblasti kružnice k je dán bod A. Všechny lichoběžníky, které jsou do kružnice k vepsány tak, že jejich prodloužená ramena se protínají v bodě A, mají společný průsečík úhlopříček. Dokažte. [47–A–III–5]

6. *Kladná reálná čísla a, b, c jsou taková, že hodnoty*

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = \frac{2a^2}{b+c}, \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a}, \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b}$$

jsou navzájem různé. Zapišme je od nejmenší po největší:

$$x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < x_{i_4} < x_{i_5} < x_{i_6}.$$

Zjistěte, kolik různých pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$ indexů 1 až 6 můžeme dostat, když budeme různě volit čísla a, b, c.

ŘEŠENÍ. Vzhledem k definici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_6$ je zřejmé, že libovolná permutace zvolených čísel a, b, c se projeví jak touž permutací hodnot x_1, x_2, x_3, tak touž permutací hodnot x_4, x_5, x_6. Stačí tedy zjistit, kolik různých pořadí lze dostat za předpokladu $a < b < c$. Celkový počet možných pořadí pak bude 6krát větší, protože permutací tří čísel a, b, c je právě $3! = 6$.

Předpokládejme tedy, že $a < b < c$ neboli $x_1 < x_2 < x_3$. Z nerovností

$$x_4 = \frac{2a^2}{b+c} < \frac{2a^2}{a+a} = a \quad \text{a} \quad x_6 = \frac{2c^2}{a+b} > \frac{2c^2}{c+c} = c$$

vyplývá $x_4 < x_1 < x_2 < x_3 < x_6$. Zbývá rozhodnout, mezi kterými dvěma z posledních pěti čísel může ležet číslo x_5, neboť to splňuje nerovnosti

$$x_5 = \frac{2b^2}{c+a} > \frac{2a^2}{c+b} = x_4 \quad \text{a} \quad x_5 = \frac{2b^2}{c+a} < \frac{2c^2}{b+a} = x_6.$$

V úvahu tak přicházejí čtyři alternativy

$$x_4 < x_5 < x_1, \quad x_1 < x_5 < x_2, \quad x_2 < x_5 < x_3, \quad x_3 < x_5 < x_6;$$

ukážeme, že jsou všechny možné.

1. Pro $(a, b, c) = (1, 2, 8)$ dostáváme

$$x_4 = \frac{1}{5} < x_5 = \frac{8}{9} < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 8 < x_6 = \frac{128}{3} = 42\,\frac{2}{3}.$$

2. Pro $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ dostáváme

$$x_4 = \frac{1}{3} < x_1 = 1 < x_5 = \frac{8}{5} < x_2 = 2 < x_3 = 4 < x_6 = \frac{32}{3} = 10\,\frac{2}{3}.$$

3. Pro $(a, b, c) = (2, 6, 9)$ dostáváme

$$x_4 = \frac{8}{15} < x_1 = 2 < x_2 = 6 < x_5 = \frac{72}{11} = 6\,\frac{6}{11} < x_3 = 9 < x_6 = \frac{81}{4} = 20\,\frac{1}{4}.$$

4. Pro $(a, b, c) = (1, 9, 12)$ dostáváme

$$x_4 = \frac{2}{21} < x_1 = 1 < x_2 = 9 < x_3 = 12 < x_5 = \frac{162}{13} = 12\,\frac{6}{13} < x_6 = \frac{144}{5} = 28\,\frac{4}{5}.$$

Samozřejmě pro každou z uvedených možností existuje mnoho jiných příkladů takových trojic $a < b < c$. Na příkladu první trojice ještě stručně ukažme, jak k ní lze dospět.

Jak víme, první z nerovností $x_4 < x_5 < x_1$ je splněna vždy, proto se budeme zabývat pouze druhou nerovností, kterou po přepsání do proměnných a, b, c vyřešíme vzhledem k c:

$$\frac{2b^2}{c + a} < a \quad \text{neboli} \quad c > \frac{2b^2}{a} - a.$$

Zvolíme-li např. $b = 2a$, dostaneme podmínku $c > 7a$ a pro vyhovující $c = 8a$ pak při volbě $a = 1$ dostaneme právě trojici $(a, b, c) = (1, 2, 8)$.

Odpověď. Existuje právě 24 různých pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ dokažte nerovnost $1/a \geqq 1/b \geqq 1/c$. [První nerovnost vynásobíme ab a druhou bc.]

N2. Pro kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ dokažte nerovnost $1/a \geqq 2/(b + c)$. [Vynásobte nerovnost výrazem $a(b + c)$ a využijte nerovnosti $a \leqq b$ a $a \leqq c$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leqq 3.$$

Určete, kdy nastane rovnost. [64–B–S–3]

D2. Jsou dána reálná čísla a, b, c, pro která platí $abc = 1$. Dokažte, že nejvýše dvě z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

jsou větší než 1. [KMS, 3. zimní série 2012/2013, úloha 7]