65. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Kolika způsoby je možno vyplnit čtvercovou tabulku 3×3 čísly 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby součet čísel v každém čtverci 2×2 této tabulky byl roven 14?

2. Je dána úsečka AB, její střed C a uvnitř úsečky AB bod D. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ se protínají v bodech E a F a polopřímka FD protíná kružnici k v bodě K, $K \neq F$. Rovnoběžka s přímkou AB procházející bodem K protíná kružnici k v bodě L, $L \neq K$. Dokažte, že $|KL| = |BD|$.

3. Jsou dána dvě různá reálná čísla a, b větší než 1. Zapište všechna možná pořadí hodnot výrazů

$$1+a, \quad 1+b, \quad 1+\frac{a+b}{2}, \quad \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2}$$

od té nejmenší po tu největší.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 21. ledna 2016

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Nejprve zjistíme, jak lze zapsat číslo 14 jako součet čtyř z daných čísel. Protože $4 + 3 \cdot 3 < 14 < 4 \cdot 4$, musí takový součet obsahovat aspoň dvě a nejvýše tři čtyřky. Dostáváme tak právě dvě možná vyjádření: $14 = 4 + 4 + 3 + 3$ a $14 = 4 + 4 + 4 + 2$.

Předpokládejme, že tabulku 3×3 máme korektně vyplněnou danými čísly, a zkoumejme, co pro ni musí platit. Víme, že každý ze čtyř čtverců 2×2 musí obsahovat buď čísla 4, 4, 4, 2, nebo čísla 4, 4, 3, 3. Soustřeďme se na čtverce 2×2, které obsahují číslo 2; pro takové čtverce máme pouze následující čtyři možnosti:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 4&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&2\\\hline 4&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&4\\\hline 2&4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 4&4\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$$

Ve kterém políčku tabulky 3×3 může být zapsáno číslo 2? Pokud by bylo zapsáno ve středním políčku, musely by být ve všech ostatních políčkách čtyřky a nezbylo by místo pro trojky:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\\hline \ &2& \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4& \ \\\hline 4&2& \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline 4&4& \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&4&4\\\hline 4&2&4\\\hline 4&4&4\\\hline\end{array}$$

Pokud by bylo číslo 2 zapsáno uprostřed krajního řádku či sloupce tabulky, v sousedních políčkách by musely být čtyřky, jichž znovu nemáme dostatek:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &2& \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2& \ \\\hline 4&4& \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2&4\\\hline 4&4&4\\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}$$

Proto jsou (obě) čísla 2 zapsána v rozích tabulky.

Pokud by byly dvojky v protějších rozích, znovu nevystačíme se čtyřkami:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ &2\\\hline \ & \ & \ \\\hline 2& \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ &2\\\hline 4&4& \ \\\hline 2&4& \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &4&2\\\hline 4&4&4\\\hline 2&4& \ \\\hline\end{array}$$

Zůstala tedy jediná možnost pro polohu čísel 2 — musí být v sousedních rozích. Následně doplníme samé čtyřky do dvou čtverců 2×2, které obsahují tyto dvojky a do zbylých políček nám nezbývá než vepsat zbývající tři trojky.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2& \ &2\\\hline \ & \ & \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4& \ \\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline \ & \ & \ \\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&2\\\hline 4&4&4\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}$$

Dostaneme tak první řešení, ve kterém je součet čísel ve všech čtyřech čtvercích 2×2 skutečně roven 14. Další tři řešení dostaneme volbou jiné dvojice sousedních rohů. Existují tak čtyři možnosti, jak tabulku vyplnit:

2	4	2
4	4	4
3	3	3

3	4	2
3	4	4
3	4	2

3	3	3
4	4	4
2	4	2

2	4	3
4	4	3
2	4	3

Jiné řešení. Stejně jako v předešlém řešení ukážeme, že číslo 14 je možné z daných čísel získat jako součet čtyř čísel pouze jako $4 + 4 + 4 + 2$ nebo $4 + 4 + 3 + 3$. Z toho dále plyne, že v každém čtverci 2×2, který obsahuje číslo 2 (nebo 3) už žádná dvojka být nemůže. V prostředním čtverečku (který je součástí čtyř čtverců 2×2) nemůže být ani číslo 2 (nezbylo by místo pro trojky), ani číslo 3 (nezbylo by místo pro dvojky). V prostředním políčku musí tedy být číslo 4.

Z předešlého řešení víme, že v políčku sousedícím hranou s prostředním čtverečkem nemůže být číslo 2, neboť by oba čtverce 2×2 obsahující tuto dvojku obsahovaly už jen čtyřky, a těch nemáme dostatek. Uprostřed musí tedy být číslo 4 a v jednom z rohů číslo 2. Tím jsou určena čísla v odpovídajícím čtverci 2×2 tabulky:

2		
	4	

$\longrightarrow$

2	4	
4	4	

Zůstalo nám pět nevyplněných políček, která mají obsahovat čísla $2, 3, 3, 3, 4$. Číslo 3 se musí vyskytovat v alespoň jednom ze dvou čtverců 2×2, které mají s již vyplněným čtvercem dvě společná políčka (a to dvakrát). Zvolme jeden z nich (při volbě druhého bude postup naprosto stejný a situace symetrická). Ostatní čísla pak můžeme vepsat už jen jediným způsobem, protože číslo 2 nemůže být ve stejném čtverci 2×2 s číslem 3:

2	4	3
4	4	3

$\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2		

$\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2	4	

$\longrightarrow$

2	4	3
4	4	3
2	4	3

Otočením o násobek $90°$ dostaneme další tři odlišná vyplnění. Snadno nahlédneme, že jsou to všechny možnosti, které dostaneme jinou volbou počátečního rohu s dvojkou a volbou přilehlého čtverce s dvěma trojkami. Tabulku lze tedy vyplnit čtyřmi způsoby.

Jiné řešení. Označme čísla ve vyplněné tabulce podle obrázku písmeny od a po i a sepišme rovnice pro jednotlivé čtverce 2×2:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$\longrightarrow$

$$a + b + d + e = 14, \qquad (1)$$
$$b + c + e + f = 14, \qquad (2)$$
$$d + e + g + h = 14, \qquad (3)$$
$$e + f + h + i = 14. \qquad (4)$$

Řešme tuto soustavu rovnic, když víme, že čísla od a po i jsou v nějakém pořadí dvě dvojky, tři trojky a čtyři čtyřky. Číslo e se nachází ve všech čtyřech rovnicích. Pokud by bylo $e = 2$, měla by soustava rovnic (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned} a + b + d &= 12, \\ b + c + f &= 12, \\ d + g + h &= 12, \\ f + h + i &= 12, \end{aligned}$$

přičemž jediný způsob, jakým lze ze zbývajících čísel 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 součtem tří dostat číslo 12, je $4 + 4 + 4$, a tak by musela všechna ostatní čísla mít pouze hodnoty 4, což není možné.

Pokud by bylo $e = 3$, měla by soustava rovnic (1)–(4) tvar

$$\begin{aligned} a + b + d &= 11, \\ b + c + f &= 11, \\ d + g + h &= 11, \\ f + h + i &= 11, \end{aligned}$$

přičemž jediný způsob, jakým lze ze zbývajících čísel 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4 součtem tří dostat číslo 11, je $4 + 4 + 3$, a tak by musela všechna ostatní čísla mít pouze hodnoty 4 a 3, což není možné (nemáme kam umístit dvojky).

Zjistili jsme, že musí být $e = 4$, a tak budeme hledat řešení soustavy

$$\begin{aligned} a + b + d &= 10, \\ b + c + f &= 10, \\ d + g + h &= 10, \\ f + h + i &= 10, \end{aligned}$$

přičemž čísla a, b, c, d, f, g, h, i jsou v nějakém pořadí čísla 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4. Pokud tyto čtyři rovnice sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned} (a + b + d) + (b + c + f) + (d + g + h) + (f + h + i) &= 40, \\ (a + b + c + d + f + g + h + i) + b + d + f + h &= 40, \\ (2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4) + b + d + f + h &= 40, \\ b + d + f + h &= 15. \end{aligned} \tag{5}$$

Jediný způsob, jak dostat číslo 15 jako součet čtyř čísel z množiny $\{2, 3, 4\}$, je $4+4+4+3$. Proto jediné řešení rovnice (5) je takové, že jedno z čísel b, d, f, h je rovno třem a zbývající jsou čtyřky. Pro každou ze čtyř možností již z rovnic (1)–(4) spolu s $e = 4$ jednoznačně dopočítáme řešení $a = 10 - b - d$, $c = 10 - b - f$, $g = 10 - d - h$, $i = 10 - f - h$, která odpovídají tabulkám

3	3	3
4	4	4
2	4	2

3	4	2
3	4	4
3	4	2

2	4	3
4	4	3
2	4	3

2	4	2
4	4	4
3	3	3

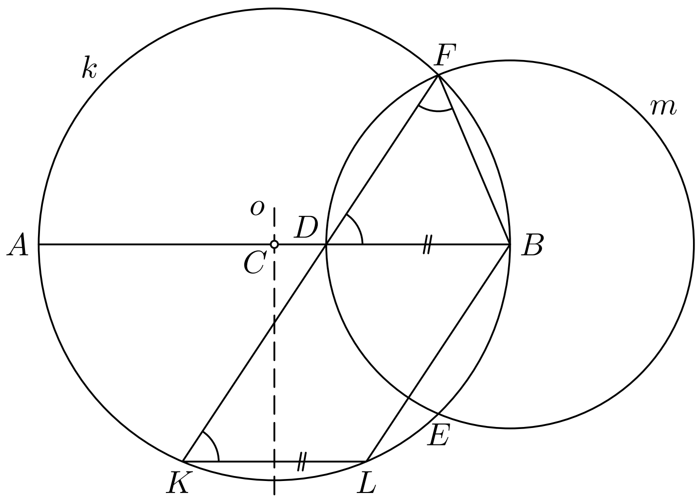
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel postupuje prvním způsobem, udělte 1 bod za nalezení obou možných rozkladů $14 = 4+4+4+2 = 4+4+3+3$, druhý bod za vyloučení dvojky ve středu čtverce 3×3, třetí bod za vyloučení dvojky „uprostřed strany“ čtverce 3×3. Čtvrtý bod dejte za zjištění, že dvojky nemohou být v protějších rozích, pátý bod za první nalezené řešení a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení.

Pokud řešitel postupuje druhým způsobem, udělte 1 bod za nalezení $14 = 4+4+4+2 = 4+4+3+3$, 2 body za určení čísla 4 ve středu čtverce 3×3. Čtvrtý bod dejte za zjištění, že dvojky nemohou být „uprostřed strany“, pátý bod za prvé nalezené řešení a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení.

Pokud řešitel postupuje třetím způsobem, udělte 3 body za zjištění hodnoty $e = 4$. Čtvrtý bod dejte za sčítání rovnic, pátý bod za objevení rovnice (5) a poslední bod za vypsání všech čtyř řešení. Pokud řešitel neuvede čtyři řešení, udělte nejvýše 5 bodů. Pokud řešitel postupuje jinak, snažte se hodnotit podobné milníky v řešení v souladu s uvedenými řešeními.

2. Body D i F leží na kružnici m se středem B, takže trojúhelník BDF je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle BFK| = |\sphericalangle BDF| > 45°$, neboť trojúhelník BDF je navíc ostroúhlý (obr. 1). To ovšem znamená, že bod K musí ležet v polorovině oA, kde o je osa úsečky AB, protože oblouk BK přísluší obvodovému úhlu většímu než $45°$.

Bod L, který je díky podmínce $AB \parallel KL$ souměrně sdružený s K podle o, bude proto ležet v polorovině oB, tudíž KL a AB (a tedy i DB) budou souhlasně orientované rovnoběžné úsečky. Odtud plyne shodnost souhlasných úhlů LKF a BDF. Dohromady tak dostáváme $|\sphericalangle LKF| = |\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle BFK|$.



Obr. 1

Přímky FB a KL jsou tedy souměrně sdruženy podle osy úsečky FK, která prochází středem C kružnice k, a je tudíž i její osou souměrnosti. Proto i průsečíky B a L těchto přímek s kružnicí k jsou souměrně sdruženy podle této osy, takže čtyřúhelník $KLBF$ je rovnoramenný lichoběžník, čili $|KL| = |BF|$. Spojením s rovností $|BF| = |BD|$ poloměrů kružnice m tak dostáváme požadovanou rovnost

$$|KL| = |BF| = |BD|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uvedení každé z rovností úhlů $|\sphericalangle BFK| = |\sphericalangle BDF|$ a $|\sphericalangle LKF| = |\sphericalangle BDF|$ udělte po 2 bodech. Dalšími dvěma body odměňte řešitele za důkaz toho, že $KLBF$ je rovnoramenný lichoběžník, resp. za to, že $|KL| = |BF|$. Poznatek, že body B a L leží na stejnou stranu od přímky KF, lze považovat za očividný, a tak může být v řešení využit mlčky.

3. Nejprve si všimněme, že záměnou hodnot a a b se hodnota posledních dvou uvažovaných výrazů nezmění, zatímco pořadí prvních dvou se změní na opačné. Čísla a a b jsou různá, můžeme proto předpokládat, že je $a < b$. Pro $a > b$ tak výměnou čísel a a b mezi sebou dostaneme již některé nalezené pořadí, v němž budou vyměněny hodnoty $1 + a$ a $1 + b$.

Protože čísla a a b jsou různá, leží jejich aritmetický průměr mezi nimi, je tedy pro $a < b$ vždy

$$1 + a < 1 + \frac{a+b}{2} < 1 + b.$$

Zbývá zjistit, na které místo lze (za uvedeného předpokladu) zařadit hodnotu posledního výrazu. Kupříkladu pro $a = 2$ a $b = 4$ máme zařadit hodnotu 4,5 mezi čísla $3 < 4 < 5$. Vidíme, že jedno z možných uspořádání všech čtyř uvažovaných hodnot je

$$1 + a < 1 + \frac{a+b}{2} < \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2} < 1 + b. \tag{1}$$

Jak jsme již předeslali, první nerovnost platí za předpokladu $a < b$ vždy. Ukážeme, že další dvě nerovnosti v (1) rovněž platí obecně pro libovolná a, b, $1 < a < b$.

Každou z obou nerovností vynásobíme kladným výrazem $a + b - 2$. Ekvivalentními úpravami levé nerovnosti dále dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{2+a+b}{2} \cdot (a+b-2) &< a^2 + b^2 - 2, \\ (a+b)^2 - 4 &< 2(a^2 + b^2 - 2), \\ 0 &< a^2 + b^2 - 2ab, \\ 0 &< (a-b)^2, \end{aligned}$$

což je nerovnost, která pro $a \neq b$ platí vždy.

Úpravou pravé nerovnosti pak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2 &< (1+b)(a+b-2), \\ a^2 + b^2 - 2 &< a + b - 2 + ab + b^2 - 2b, \\ 0 &< -a^2 + ab + a - b, \\ 0 &< a(b-a) - (b-a) = (b-a)(a-1), \end{aligned}$$

což díky nerovnostem $1 < a < b$ platí rovněž.

S ohledem na symetrii zmíněnou v úvodu tak dostáváme dvě možná uspořádání uvažovaných hodnot:

$$\begin{aligned} 1 + a < 1 + \frac{a+b}{2} < \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2} < 1 + b, &\quad \text{pokud } a < b, \\ 1 + b < 1 + \frac{a+b}{2} < \frac{a^2+b^2-2}{a+b-2} < 1 + a, &\quad \text{pokud } b < a. \end{aligned}$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správnou pozici hodnoty $1 + (a + b)/2$ mezi čísly $1 + a$ a $1 + b$ udělte 1 bod. Důkaz každé z dalších dvou nerovností (1) oceňte dvěma body. Poslední bod udělte za uvedení obou možných uspořádání.