65. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, pro něž platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$.

2. U stolu sedí několik lidí (aspoň dva) a hrají takovou hru: v každém kole tajným hlasováním každý hráč udělí hlas jednomu hráči (může i sám sobě). Pak se kolo vyhodnotí: každý hráč, který dostal právě jeden hlas, ze hry vypadává.

a) Kolik lidí mohlo sedět u stolu na začátku, když v prvním kole vypadl ze hry právě jeden hráč?

b) Mohla mít hra jediného vítěze, tedy člověka, který po určitém počtu kol zůstal ve hře sám?

3. V kružnici o středu S sestrojíme průměr AB a libovolnou k němu kolmou tětivu CD. Zdůvodněte, proč je obvod trojúhelníku ACD menší než dvojnásobek obvodu trojúhelníku SBC.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 21. ledna 2016

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

65. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. V rovnici ze zadání

$$1\,000a + 100b + 10c + d = 20(10a + b) + 16(10c + d)$$

mají neznámé číslice a a b větší koeficienty na levé straně, zatímco číslice c a d na straně pravé. Proto rovnici upravíme do tvaru $800a + 80b = 150c + 15d$, který po vydělení pěti a vytknutí menších koeficientů obou stran přepíšeme jako $16(10a + b) = 3(10c + d)$. Odtud díky nesoudělnosti čísel 3 a 16 plyne, že $10c + d$ je dvojmístný násobek čísla 16. Ten je ovšem větší než 48, neboť $3 \cdot 48 = 144$, zatímco $16(10a + b) \geqq 160$ (číslice a musí být nenulová). Jako hodnoty $10c + d$ tak připadají v úvahu pouze násobky 16 rovné 64, 80 a 96, čísla určující svým zápisem číslice c a d. Dosazením do rovnice $16(10a + b) = 3(10c + d)$ dostaneme pro dvojmístné číslo $10a + b$ po řadě hodnoty 12, 15 a 18.

Odpověď. Vyhovují tři čísla 1 264, 1 580 a 1 896.

Poznámka. Namísto čtyř neznámých číslic a, b, c, d lze k zápisu rovnice ze zadání využít zřejmě rovnou obě dvojmístná čísla $x = \overline{ab}$ a $y = \overline{cd}$. Rovnice pak bude mít tvar $100x + y = 20x + 16y$, který podobně jako v původním postupu upravíme na $80x = 15y$ neboli $16x = 3y$. Nyní místo vztahu $16 \mid y$ můžeme využít druhý podobný důsledek $3 \mid x$ a uvědomit si, že z odhadu $y \leqq 99$ plyne $16x \leqq 3 \cdot 99 = 297$, odkud $x \leqq 18$, což spolu s odhadem $x \geqq 10$ vede k možným hodnotám $x \in \{12, 15, 18\}$. Z rovnice $16x = 3y$ pak už dopočteme $y = 64$ pro $x = 12$, $y = 80$ pro $x = 15$ a $y = 96$ pro $x = 18$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, logicky správný postup s početními chybami (podle jejich míry) oceňte nejvýše 4 body. U nedokončeného postupu udělte 1 bod za zápis zadané rovnice v rozvinutém tvaru (tj. s mocninami základu 10), za jeho úpravu do součinového tvaru s nesoudělnými činiteli 16 a 3 pak rovněž 1 bod.

2. a) Ukážeme, že v popsané situaci mohl na začátku u stolu sedět libovolný počet lidí větší než 2. Dva hráči to totiž být nemohli (to by v prvním kole vypadli ze hry buď oba, nebo žádný z nich, rozdělení dvou hlasů je totiž buď 1 : 1, nebo 2 : 0).

Jsou-li na začátku hráči aspoň tři, pak v prvním kole vypadne pouze jeden hráč A, když kupříkladu hráč A dá hlas sobě a všichni ostatní (jsou nejméně dva) ho dají témuž hráči B, $B \neq A$ (tedy i hráč B dá hlas sobě). Není to samozřejmě jediný způsob hlasování s požadovaným výsledkem.

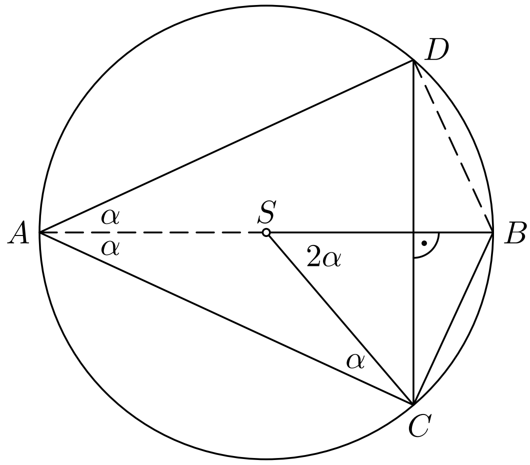
b) Vysvětlíme, proč jediný hráč ve hře nikdy zůstat nemůže. Opak by znamenal, že v posledním kole před nastalou situací, kdy ve hře bylo řekněme m hráčů, kde $m > 1$, by v důsledku jejich hlasování vypadlo $m - 1$ hráčů. Protože při tomto hlasování bylo rozdáno právě m hlasů a $m - 1$ hráčů (ti, co poté vypadli) dostalo právě jeden hlas, musel i zbylý m-tý hráč dostat právě jeden (zbylý) hlas, a tedy rovněž vypadnout, a to je spor.

Za úplné řešení části a) udělte 2 body, za úplné řešení části b) udělte 4 body. Za drobné argumentační nedostatky strhněte 1–2 body.

3. Kýžený vztah mezi obvody trojúhelníků ACD a SBC vyplyne, když pro délky jejich stran objevíme nerovnosti

$$|AC| < 2|SB|, \quad |AD| < 2|SC| \quad \text{a} \quad |CD| < 2|BC|.$$

První dvě z nich jsou důsledkem toho, že tětivy AC a AD dané kružnice jsou kratší než její průměr AB (obr. 1), třetí nerovnost zapsaná ve tvaru $\frac{1}{2}|CD| < |BC|$ je nerovností mezi délkami odvěsny a přepony dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, na které je trojúhelník BCD rozdělen přímkou AB, jež je totiž (díky předpokladu $AB \perp CD$) osou tětivy CD. Dodejme, že stejně dobře lze využít i trojúhelníkovou nerovnost $|CD| <$ $< |BC| + |BD| = 2|BC|$.



Obr. 1

Jiné řešení. Označme α vnitřní úhly při základně AC rovnoramenného trojúhelníku SAC. Pak jeho vnější úhel při vrcholu S, totiž úhel CSB, má velikost 2α, kterou má i úhel CAD, neboť polopřímka AB je jeho osou (obr. 1). Rovnoramenné trojúhelníky ACD a SCB se tak shodují ve vnitřních úhlech při svých hlavních vrcholech A a S, a jsou tudíž podobné. Proto je poměr jejich obvodů roven poměru délek jejich ramen, a ten má skutečně hodnotu menší než 2, neboť ramena trojúhelníku ACD jsou kratší nežli průměr dané kružnice, zatímco ramena trojúhelníku SCB mají délku jejího poloměru.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhad délek AC, AD pomocí průměru dané kružnice v neúplném řešení udělte 1 bod. Za nerovnost $|CD| < 2|BC|$ udělte 1 bod, jen když je zdůvodněna; chybí-li toto zdůvodnění v jinak úplném řešení, strhněte 1 bod. Konečně 1 bod udělte i za objev, že trojúhelníky ACD a SCB jsou podobné. Za pouhou zmínku o jejich rovnoramennosti však žádný bod neudělujte.