65. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Na tabuli jsou napsána různá přirozená čísla. Jejich aritmetický průměr je desetinné číslo, jehož desetinná část je přesně 0,2016. Jakou nejmenší hodnotu může tento průměr mít?

2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Na jeho straně CD zvolíme bod E tak, aby platilo $|\sphericalangle BAE| = 60^\circ$. Dále zvolme libovolný vnitřní bod úsečky AE a označme jej X. Bodem X pak veďme kolmici na přímku BX a její průsečík s přímkou BC označme Y. Jaká je nejmenší možná délka úsečky BY?

3. Kolika způsoby lze rozdělit množinu $\{1, 2, \ldots, 12\}$ na šest disjunktních dvouprvkových podmnožin takových, že každá z nich obsahuje nesoudělná čísla (tedy taková, která nemají společného dělitele většího než jedna)?

4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a a b tak, aby nerovnost

$$|x^2 + ax + b| \leqq m(x^2 + 1)$$

platila pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 12. ledna 2016

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Nechť s je součet čísel na tabuli, n je jejich počet a p je celá část aritmetického průměru. Potom platí rovnost

$$\frac{s}{n} = p + \frac{2\,016}{10\,000} = p + \frac{126}{625},$$

z níž roznásobením vyjde

$$625(s - pn) = 126n.$$

Odtud vidíme, že 625 dělí levou stranu, takže musí dělit i pravou. Ovšem čísla 126 a 625 jsou nesoudělná, a tak dokonce $625 \mid n$. Zajisté proto platí, že $n \geqq 625$.

Dále využijeme různosti čísel na tabuli ke zjištění, že

$$p = \frac{s}{n} - \frac{126}{625} \geqq \frac{1+2+\ldots+n}{n} - \frac{126}{625} = \frac{n(n+1)/2}{n} - \frac{126}{625} \geqq \frac{625+1}{2} - \frac{126}{625} > 312.$$

Celé číslo p je tedy alespoň 313 a hodnota průměru alespoň 313,2016.

Zbývá najít množinu čísel, jejichž aritmetický průměr by se této hodnotě přesně rovnal. Volbou 625prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, 624, 751\}$ dostáváme aritmetický průměr

$$\frac{1+2+\ldots+624+751}{625} = \frac{312 \cdot 625 + 751}{625} = 313 + \frac{126}{625} = 313{,}2016.$$

Odpověď. Nejmenší možná hodnota průměru je 313,2016.

Poznámka. Příklad vyhovující množiny čísel s aritmetickým průměrem 313,2016 není jediný. Ukažme, jak jeden (výše uvedený) příklad najít a jak vypadají všechny ostatní.

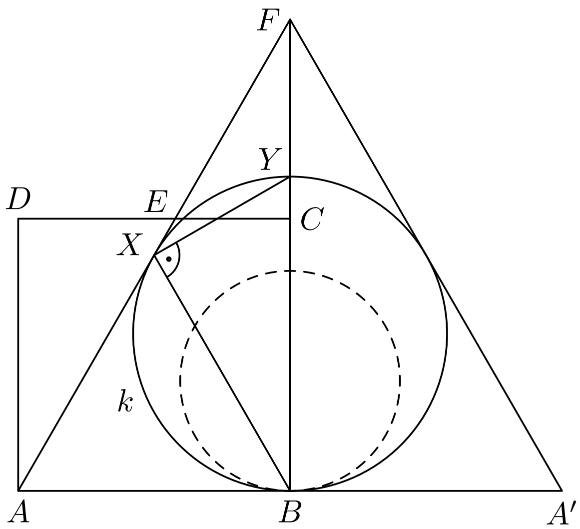
Z odvozeného odhadu

$$p \geqq \frac{n+1}{2} - \frac{126}{625}$$

plyne, že hodnota $p = 313$ je možná jedině pro $n = 625$, kdy z rovnosti $625(s - pn) = 126n$ dosazením obou hodnot p a n dostaneme $s = 126 + 625 \cdot 313$. Takový součet prvků charakterizuje všechny hledané (jak víme 625prvkové) množiny přirozených čísel. Protože $625 \cdot 313$ je součet čísel množiny $\{1, 2, \ldots, 625\}$, vyhovující množinu z ní dostaneme, když například její největší prvek 625 zvětšíme o 126 na hodnotu $625+126 = 751$. Dodejme, že k dosažení cíle můžeme takovou operaci rovněž provést s libovolným prvkem i zmíněné množiny při $i \geqq 500$ (připomeňme, že čísla na tabuli byla různá), anebo příslušně zvětšit dvě či více čísel současně (tak lze například dostat vyhovující množinu $\{1, 2, \ldots, 499, 501, \ldots, 625, 626\}$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body udělte za sestrojení množiny s průměrem rovným 313,2016 a zbylé čtyři za odvození, že nižšího průměru dosáhnout nelze. Ze čtyř bodů vyhrazených pro druhou část udělte dva za důkaz, že počet čísel na tabuli je alespoň 625 (stačí i vztah $625 \mid n$), jeden za využití různosti čísel k dolnímu odhadu průměru číslem $(n+1)/2$ a 1 bod za spojení obou výsledků. Pokud řešitel nezmíní nesoudělnost čísel 126 a 625, body nestrhávejte. Také netrestejte, pokud řešitelem sestrojená množina nevyhovuje pouze vinou drobné aritmetické chyby (například číslo 751 z našeho příkladu je zaměněno číslem 750).

2. Nechť X a Y jsou libovolné dva body popsané v zadání. Uvažme Thaletovu kružnici nad průměrem BY opsanou pravoúhlému trojúhelníku BYX. Ta obsahuje bod X úsečky AE a zároveň se v bodě B dotýká přímky AB. Ze všech takových kružnic má zřejmě nejmenší průměr kružnice k, která má s úsečkou AE společný pouze jeden bod, tudíž se jí dotýká, a je proto vepsána do rovnostranného trojúhelníku $AA'F$, kde A' je obraz bodu A ve středové souměrnosti podle vrcholu B a F leží na polopřímce BC (viz obr. 1, kde je vykreslena i jedna z těch kružnic s tečnou AB v bodě B, které mají menší poloměr nežli kružnice k, a tak k úsečce AE „nedosahují“). Protože střed kružnice k je zároveň těžištěm trojúhelníku $AA'F$ o stranách délky 2, má její průměr délku $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ a odpovídající bod X je středem strany AF, takže opravdu patří úsečce AE, neboť $|AX| = 1 < |AE|$.



Obr. 1

Odpověď. Nejmenší možná délka úsečky BY je $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Jiné řešení. Vezměme libovolné přípustné body X a Y, označme X_0 patu kolmice z bodu X na AB a položme $|AX| = 2x$. Trojúhelník AXX_0 má vnitřní úhly o velikostech $30°$, $60°$ a $90°$, takže $|AX_0| = x$, $|X_0B| = 1-x$ a $|XX_0| = \sqrt{3}x$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník XX_0B pak platí $|BX|^2 = 4x^2 - 2x + 1$. Navíc pravoúhlé trojúhelníky XX_0B a BXY jsou podobné (úhly X_0XB a YBX jsou shodné střídavé úhly příčky BX rovnoběžek BY a XX_0), a my tak můžeme vyjádřit délku úsečky BY jako

$$|BY| = |BX| \cdot \frac{|BX|}{|XX_0|} = \frac{4x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Bigl(4x + \frac{1}{x} - 2\Bigr).$$

Podle AG-nerovnosti navíc platí $4x + 1/x \geqq 4$, takže $|BY| \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Jelikož rovnost nastává, je-li $4x = 1/x$ neboli $x = \frac{1}{2}$, kdy $|AX| = 2x = 1 < |AE|$, takže bod X je tehdy skutečně bodem úsečky AE, je hodnota $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ dosažitelná, a tedy zároveň hledaným minimem.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení bodů X a Y takových, že $|BY| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, udělte dva body, přitom v případě, že řešitel zcela opomene zmínit, proč jím nalezený bod X leží na úsečce AE, udělte ovšem bod pouze jeden. Zbylé čtyři body udělte za důkaz, že nižší hodnoty dosáhnout nelze. Postupuje-li řešitel početně, udělte dva body za vyjádření délky úsečky BY pomocí jakéhokoliv parametru určujícího polohu bodu X (délka AX, úhel ABX atp.).

3. Žádná dvě sudá čísla nemohou být ve stejné ze šesti dvouprvkových podmnožin (říkejme jim dále „páry"), a my se tak můžeme omezit na taková rozdělení množiny $\{1, 2, \dots, 12\}$ (říkejme jim sudolichá), v nichž jsou páry tvořeny vždy jedním sudým a jedním lichým číslem. Další omezení je, že k číslu 6 ani k číslu 12 nesmíme přiřadit čísla 3 a 9; k číslu 10 pak nesmí být přiřazeno číslo 5. Počet vyhovujících sudolichých rozdělení určíme dvěma způsoby.

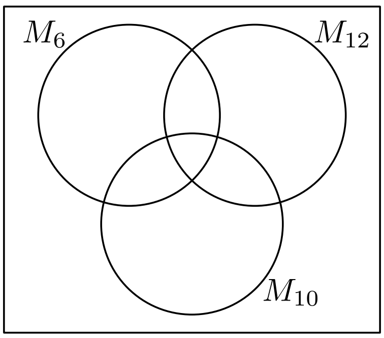
První způsob: Jednotlivým lichým číslům od 1 do 11 nejprve určíme potenciální sudé „partnery". Pro čísla 1, 7 a 11 tvoří množinu $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, pro čísla 3 a 9 množinu $\{2, 4, 8, 10\}$, konečně pro číslo 5 množinu $\{2, 4, 6, 8, 12\}$. Z toho je vidět, že k určení počtu všech vyhovujících výběrů sudých partnerů nemůžeme rovnou uplatnit pravidlo součinu, ať už bychom výběr prováděli postupně pro daná lichá čísla v jakémkoli pořadí. Pro „nadějné" pořadí $(5, 3, 9, 1, 7, 11)$ však pravidlo součinu zafunguje, když předem rozlišíme, zda je číslu 5 přiřazeno číslo z $\{6, 12\}$, nebo číslo z $\{2, 4, 8\}$.[1] Možností je tak $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$ v případě prvním a $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 108$ v druhém. Celkem pak máme $144 + 108 = 252$ možností.

Druhý způsob: Protože při sudolichém rozdělení musí být každé ze šesti lichých čísel v páru s jiným ze šesti sudých čísel, je počet všech takových (vyhovujících i nevyhovujících) rozdělení roven $6! = 720$. Spočítáme nyní, kolik z těchto sudolichých rozdělení je nevyhovujících.

Všechna nevyhovující sudolichá rozdělení tvoří zřejmě množinu $M_6 \cup M_{12} \cup M_{10}$, kde M_6 je množina těch sudolichých rozdělení množiny $\{1, 2, \dots, 12\}$, ve kterých je s číslem 6 v páru číslo 3 nebo 9, M_{12} je množina sudolichých rozdělení, v nichž je s číslem 12 číslo 3 nebo 9 a konečně M_{10} je množina těch rozdělení, ve kterých je s číslem 10 v páru číslo 5. Velikost sjednocení $M_6 \cup M_{12} \cup M_{10}$ je podle principu inkluze a exkluze, jehož platnost lze pro tři množiny nahlédnout pomocí Vennova diagramu (obr. 2), rovna

$$|M_6| + |M_{12}| + |M_{10}| - |M_6 \cap M_{12}| - |M_6 \cap M_{10}| - |M_{12} \cap M_{10}| + |M_6 \cap M_{12} \cap M_{10}|$$
$$= 2 \cdot 5! + 2 \cdot 5! + 5! - 2 \cdot 4! - 2 \cdot 4! - 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! = 468.$$

Jelikož všech sudolichých rozdělení je 720 a nevyhovujících je 468, je počet těch vyhovujících $720 - 468 = 252$.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel správně určí výsledek v „kombinatorickém tvaru" (např. jako $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) a dopustí se chyby jen při jeho vyčíslení, udělte pět bodů. Pokud předloží funkční způsob, kterak se dopočítat výsledku (jiný než výčet všech možností), a řešení nedokončí nebo v jeho průběhu pochybí, udělte nejvýše tři body. Za pozorování o sudolichých rozděleních ani za výčet soudělných dvojic body neudělujte.

[1] K tomuto rozlišení jsme motivováni průnikem určených množin $\{2, 4, 6, 8, 12\}$ a $\{2, 4, 8, 10\}$.

4. Předpokládejme, že čísla a, b, m splňují podmínku

$$\forall x \in \langle -1, 1\rangle\colon |f(x)| \leqq m(x^2+1), \quad \text{kde} \quad f(x) = x^2 + ax + b.$$

Nejprve ukážeme, že alespoň jeden z rozdílů $f(1) - f(0)$ a $f(-1) - f(0)$ je větší nebo roven jedné: pro libovolnou funkci $f(x) = x^2 + ax + b$ je totiž

$$f(0) = b, \quad f(1) = 1 + a + b, \quad f(-1) = 1 - a + b,$$

takže

$$\max\bigl(f(1) - f(0), f(-1) - f(0)\bigr) = \max(1 + a, 1 - a) = 1 + |a| \geqq 1.$$

Předpoklad z úvodu řešení znamená, že $|f(1)| \leqq 2m$, $|f(-1)| \leqq 2m$ a $|f(0)| \leqq m$. Je tedy buď

$$1 \leqq 1 + |a| = f(1) - f(0) \leqq |f(1)| + |f(0)| \leqq 2m + m = 3m, \tag{1}$$

nebo

$$1 \leqq 1 + |a| = f(-1) - f(0) \leqq |f(-1)| + |f(0)| \leqq 2m + m = 3m. \tag{2}$$

V obou případech dostáváme odhad $m \geqq \frac{1}{3}$.

Pokusíme se ukázat, že $m = \frac{1}{3}$ splňuje požadavky úlohy. Pro takové m ovšem v (1) nebo (2) platí všude rovnost, takže musí být $a = 0$, $-f(0) = |f(0)|$ a $|f(0)| = m = \frac{1}{3}$, tudíž $b = f(0) = -\frac{1}{3}$. Zdůrazněme, že pro nalezené hodnoty m, a, b prozatím nic nevíme o platnosti nerovnosti ze zadání úlohy pro hodnoty $x \in \langle -1, 1\rangle$ různé od čísel -1, 0 a 1, o kterých jsme dosud vůbec neuvažovali.

Ověřme tedy, že nalezená funkce $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ pro $m = \frac{1}{3}$ podmínky úlohy splňuje: Nerovnost $|x^2 - \frac{1}{3}| \leqq \frac{1}{3}(x^2+1)$ je ekvivalentní s nerovnostmi

$$-\frac{1}{3}(x^2+1) \leqq x^2 - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{3}(x^2+1) \quad \text{neboli} \quad -x^2 - 1 \leqq 3x^2 - 1 \leqq x^2 + 1$$

a ty jsou ekvivalentní nerovnostem $0 \leqq x^2 \leqq 1$, jež jsou na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ zřejmě splněny.

Odpověď. Hledané nejmenší m je rovno zlomku $\frac{1}{3}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení hodnot parametrů a, b pro $m = 1/3$ udělte jeden bod, další (druhý) bod pak udělte za přímé ověření vztahu ze zadání. Za odvození *nutné* podmínky $m \geqq 1/3$ udělte čtyři body. Nahradí-li řešitel algebraické užití trojúhelníkové nerovnosti obdobnou geometrickou úvahou, body nestrhávejte. Naopak za úvahy o tvaru grafu kvadratické funkce (například mlčky využívající její konvexitu) body neudělujte, nejsou-li tyto úvahy doprovozeny dodatečnými argumenty.