65. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Pardubice, 3.–6. dubna 2016

1. *Nechť $p > 3$ je dané prvočíslo. Určete počet všech uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, jejichž součet je roven $3p$, a přitom všechny zlomky*

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}$$

mají celočíselné hodnoty. (Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček)

Řešení. Ze součinu 1., 3. a 5. zlomku vidíme, že jejich hodnoty se rovnají 1, takže platí

$$a + b = c + d = e + f = p. \tag{1}$$

Z tvaru 2. a 4. zlomku pak plyne

$$f + a \mid d + e \quad \text{a} \quad d + e \mid b + c. \tag{2}$$

Odtud jednak plyne, že $f + a$ není větší než aritmetický průměr svých násobků,

$$f + a \leqq \tfrac{1}{3}((f + a) + (d + e) + (b + c)) = p, \tag{3}$$

a zároveň

$$f + a \mid (f + a) + (d + e) + (b + c) = 3p.$$

Číslo $f + a$ je tudíž dělitelem čísla $3p$ a navíc leží v intervalu $\langle 2, p \rangle$. Je tedy $f + a = p$ nebo $f + a = 3$. Oba případy prozkoumáme odděleně.

(i) Nechť $f + a = p$. S ohledem na (3) pak platí $f + a = d + e = b + c = p$, což dohromady s (1) dává $p - 1$ řešení ve tvaru

$$(a, b, c, d, e, f) = (a, p - a, a, p - a, a, p - a), \quad \text{kde } a \in \{1, 2, \dots, p - 1\}.$$

(ii) Nechť $f + a = 3$. V tomto případě je $\{a, f\} = \{1, 2\}$.

Nechť nejprve $a = 1$ a $f = 2$. Podle (1) pak $b = p - 1$ a $e = p - 2$ a relace (2) mají tvar

$$3 \mid d + (p - 2) \quad \text{a} \quad d + (p - 2) \mid (p - 1) + c. \tag{4}$$

Při rozboru (4) rozlišíme, zda $d = 1$, nebo $d \geqq 2$.

Pro $d = 1$ je $c = p - 1$ a vztahy (4) mají v takovém případě tvar

$$3 \mid p - 1 \quad \text{a} \quad p - 1 \mid 2(p - 1).$$

Zatímco pravá relace platí vždy, levé relaci vyhovují jedině prvočísla p tvaru $p = 3q + 1$ (q je vhodné přirozené číslo). Pro taková prvočísla dostáváme s využitím (1) řešení

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, p - 1, p - 1, 1, p - 2, 2).$$

Pro $d \geqq 2$ nejprve ukážeme, že pravá relace ve (4) je splněna, právě když platí $d + (p - 2) = (p - 1) + c$ neboli $d = c + 1$. Ze vztahu $d \geqq 2$ totiž plyne $c = p - d \leqq p - 2$, a tak číslo $(p - 1) + c$ nemůže být netriviálním násobkem čísla $d + (p - 2)$, neboť

$$d + (p - 2) \geqq p \quad \text{a} \quad (p - 1) + c \leqq 2p - 3 < 2p.$$

Proto se obě čísla rovnají. Z rovností $c + d = p$ a $d = c + 1$ pak máme $c = \frac{1}{2}(p - 1)$ a $d = \frac{1}{2}(p + 1)$. Protože $d + (p - 2) = \frac{3}{2}(p - 1)$, je splněna i levá relace ve (4), a dostáváme tak další vyhovující šestici přirozených čísel

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, p - 1, \tfrac{1}{2}(p - 1), \tfrac{1}{2}(p + 1), p - 2, 2).$$

Zbývá posoudit případ $a = 2$ a $f = 1$. V tomto případě pak platí $b = p - 2$ a $e = p - 1$, takže relace (2) mají tvar

$$3 \mid d + (p-1) \quad \text{a} \quad d + (p-1) \mid (p-2) + c. \tag{5}$$

Protože

$$d + (p-1) \geqq p \quad \text{a} \quad (p-2) + c < 2p,$$

je pravá relace v (5) splněna, právě když $d+(p-1) = (p-2)+c$, tj. právě když $c = d+1$. To spolu s rovností $c + d = p$ vede k $c = \frac{1}{2}(p+1)$ a $d = \frac{1}{2}(p-1)$, takže i levá relace v (5) platí, a dostáváme tak poslední vyhovující šestici přirozených čísel

$$(a, b, c, d, e, f) = (2, p-2, \tfrac{1}{2}(p+1), \tfrac{1}{2}(p-1), p-1, 1).$$

Závěr. Všechna nalezená řešení jsou zřejmě různá a jejich počet závisí na tom, jaký zbytek při dělení třemi dává dané prvočíslo $p > 3$: Pro prvočísla p tvaru $p = 3q + 1$ tak existuje $p + 2$ šestic a pro prvočísla p tvaru $p = 3q + 2$ existuje $p + 1$ šestic.

---

2. *Označme postupně r a r_a poloměry kružnice vepsané a kružnice připsané straně BC trojúhelníku ABC. Ukažte, že pokud platí*

$$r + r_a = |BC|,$$

je trojúhelník pravoúhlý. (Michal Rolínek)

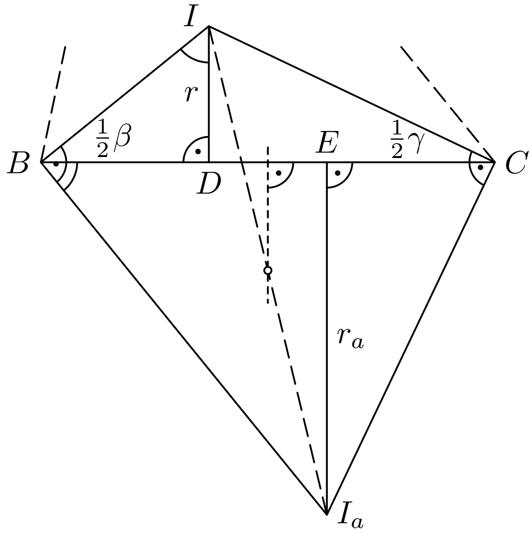
Řešení. Při obvyklém značení stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme v následujícím ještě I střed kružnice vepsané, I_a střed kružnice připsané straně BC a body dotyku zmíněných kružnic se stranou BC označme postupně D a E. Protože osy BI a BI_a obou vedlejších úhlů při vrcholu B jsou navzájem kolmé, což samozřejmě platí i pro osy CI a CI_a, leží body B, C, I a I_a na kružnici s průměrem II_a. Odtud zřejmě plyne, že body D a E jakožto kolmé průměty obou krajních bodů průměru II_a na tětivu BC jsou souměrně sdruženy podle středu strany BC.

1. postup. Pravoúhlé trojúhelníky BID a I_aBE jsou podobné, neboť oba úhly BID a I_aBE doplňují úhel CBI do $90°$ (obr. 1). Platí tedy

$$|BD| : |ID| = |I_aE| : |BE| \quad \text{neboli} \quad |BD| \cdot |BE| = |ID| \cdot |I_aE|$$

a vzhledem ke zmíněné symetrii také

$$|BD| + |BE| = |BD| + |CD| = |BC| = r + r_a = |ID| + |I_aE|.$$



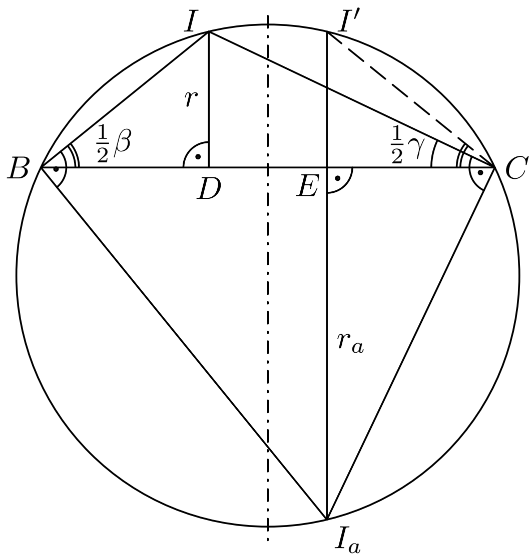
Obr. 1

Z obou rovností tak plyne, že dvojice čísel $(|ID|, |EI_a|)$ a $(|BD|, |BE|)$ jsou kořeny téže kvadratické rovnice, a tak je $|ID| = |BD|$ nebo $|ID| = |BE|$.

Zřejmě $|ID| = |BD|$, právě když je trojúhelník BID pravoúhlý rovnoramenný neboli $\beta = 90°$. A podobně $|ID| = |BE|$ neboli $|ID| = |CD|$ (opět díky zmíněné symetrické poloze bodů D a E), právě když je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník CID. V tom případě je $\gamma = 90°$.

Tak jako tak je trojúhelník ABC pravoúhlý.

2. postup. Osa tětivy BC kružnice k nad průměrem II_a je osou pásu mezi rovnoběžkami ID a I_aE (opět díky symetrické poloze bodů D a E na BC). Označíme-li I' obraz bodu I v této souměrnosti (obr. 2), je zřejmě $|I'I_a| = |I'E| + |EI_a| = |ID| + + |EI_a| = r + r_a$, takže dle předpokladu $|BC| = r + r_a = |I_aI'|$. Shodným tětivám BC a $I'I_a$ téže kružnice příslušejí shodné obvodové úhly.



Obr. 2

Jak snadno spočteme (viz např. obr. 1), je $|\sphericalangle BIC| = 90° - \frac{1}{2}\beta + 90° - \frac{1}{2}\gamma = 90° + + \frac{1}{2}\alpha$ a $|\sphericalangle I'CI_a| = |\sphericalangle I'CB| + |\sphericalangle BCI_a| = \frac{1}{2}\beta + (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \beta + \frac{1}{2}\alpha$. Je tedy buď $90° + \frac{1}{2}\alpha = \beta + \frac{1}{2}\alpha$ neboli $\beta = 90°$, anebo $(90° + \frac{1}{2}\alpha) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180°$ neboli $\gamma = 90°$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

3. postup. Označíme-li P obsah trojúhelníku ABC, s polovinu jeho obvodu a položíme-li $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, lze známé vzorce pro obsah P zapsat zjednodušeně takto:

$$P^2 = xyzs, \quad P = rs, \quad P = r_a x.$$

Odtud vypočteme

$$r^2 = \frac{xyz}{s} \quad \text{a} \quad r_a^2 = \frac{yzs}{x}.$$

Zadanou podmínku $r + r_a = y + z$ umocníme a pomocí předchozího přepíšeme jako

$$x^2yz + yzs^2 = y^2xs + z^2xs$$

neboli

$$(zs - xy)(ys - xz) = 0.$$

Po zpětné substituci do a, b, c získáme po chvíli ekvivalentních úprav očekávané

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2) = 0,$$

a tvrzení úlohy tak plyne z Pythagorovy věty.

3. *Mezi obyvateli jistého města jsou populární matematické kluby. Dokonce každé dva z nich mají alespoň jednoho společného člena. Dokažte, že můžeme obyvatelům města rozdat kružítka a pravítka tak, že jen jeden obyvatel dostane obojí, a přitom každý klub bude mít při plné účasti svých členů k dispozici jak pravítko, tak kružítko.*
(Josef Tkadlec)

Řešení. Uvažme klub K s nejmenším počtem členů (je-li takových klubů více, vyberme kterýkoli). Jednomu jeho členu (říkejme mu Jakub) dáme obojí a ostatním členům kružítko. Všichni zbylí obyvatelé dostanou pravítko. Tvrdíme, že takové rozdělení rýsovacích potřeb vyhovuje podmínkám úlohy.

Každý klub, jehož je Jakub členem, je jistě vybaven. I pokud do nějakého klubu Jakub nepatří, tak má tento klub s K nějakého společného člena, a tedy je vybaven alespoň kružítkem. Pokud by v tomto klubu nebylo žádné pravítko, znamenalo by to, že je celý obsažen v K a má přitom alespoň o jednoho člena méně (neobsahuje Jakuba). To je spor s volbou K, a vidíme tak, že je vskutku každý klub řádně vybaven.

Poznámka. Není těžké si uvědomit, že bez možnosti dát jednomu obyvateli obojí by závěr úlohy neplatil. Uveďme zde pro zajímavost dva takové (a přitom velmi odlišné) případy.

Jeden obyvatel je členem všech klubů a zároveň má i svůj jednočlenný klub. Tento klub pak samozřejmě nebude oběma nástroji vybaven.

Pro $2n+1$ obyvatel řekneme, že každých $n+1$ z nich tvoří klub. Pak skutečně nejsou žádné dva kluby disjunktní, a přitom kdykoli rozdáme pravítka a kružítka, tak jelikož od jednoho nástroje jsme rozdali alespoň $n+1$ kusů, nalezneme klub vlastnící pouze tento nástroj.

---

4. *Pro kladná čísla a, b, c platí*

$$(a+c)(b^2+ac)=4a.$$

Určete maximální hodnotu výrazu $b+c$ a najděte všechny trojice čísel (a,b,c), pro něž výraz této hodnoty nabývá.
(Michal Rolínek)

Řešení. Zadanou rovnost šikovně upravíme a odhadneme pomocí známé nerovnosti $a^2+b^2 \geqq 2ab$ takto:

$$4a=(a+c)(b^2+ac)=a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2) \geqq a(b^2+c^2)+2abc=a(b+c)^2.$$

Odtud jednak vidíme, že $b+c \leqq 2$, a také, že rovnost nastane, právě když $0<a=b<2$ a $c=2-b>0$. To je vše.

Jiné řešení. Uvážíme-li kvadratickou rovnici

$$4t=(t+c)(b^2+tc)$$

s neznámou t, pak díky vztahu ze zadání víme, že tato rovnice má kořen $t=a$. Rovnici upravíme do tvaru

$$ct^2+(b^2+c^2-4)t+cb^2=0$$

a všimneme si, že musí platit $b^2+c^2-4<0$. Jinak by totiž levá strana byla pro libovolné kladné t kladná, což je ve sporu s faktem, že rovnice má kladný kořen.

Skutečnost, že uvedená rovnice má nezáporný diskriminant, zapíšeme takto:

$$(2bc)^2 \leqq (4-b^2-c^2)^2.$$

Jelikož jsou oba základy mocnin kladné, lze nerovnost odmocnit a následně upravit do tvaru $(b+c)^2 \leqq 4$, neboli $b+c \leqq 2$.

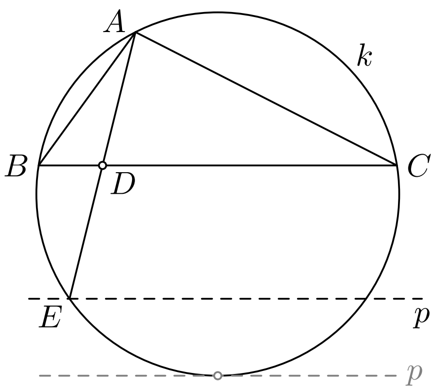
Rovnost $b+c=2$ nastane, právě když má zmíněná rovnice nulový diskriminant, a tedy dvojnásobný kořen, jímž ovšem musí být číslo a. Protože je však součin kořenů (podle Viètových vztahů) roven b^2, musí být nutně $a=b$. Snadno pak ověříme, že trojice $(r, r, 2-r)$ pro libovolné $r \in (0,2)$ skutečně rovnosti ze zadání vyhovují.

---

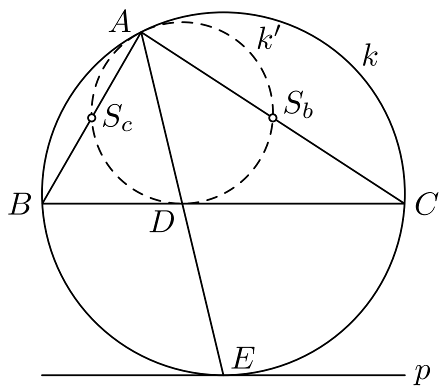
5. *V trojúhelníku ABC platí $|BC|=1$ a zároveň na straně BC existuje právě jeden bod D takový, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Určete všechny možné hodnoty obvodu trojúhelníku ABC.* (Patrik Bak)

Řešení. Označme E druhý průsečík přímky AD s kružnicí k trojúhelníku ABC opsanou. Z mocnosti bodu D ke kružnici k plyne, že $|DB| \cdot |DC| = |DA| \cdot |DE|$, což porovnáním se zadanou podmínkou $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$ dává $|DA| = |DE|$. Bod E tedy leží na obraze p přímky BC ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 2 (obr. 3).

I naopak platí, že k libovolnému průsečíku přímky p s kružnicí k zpětně sestrojíme bod D na straně BC, který bude zřejmě splňovat rovnost $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Aby byl takový bod určen jednoznačně, musí se přímka p v bodě E kružnice k dotýkat.



Obr. 3



Obr. 4

Označme S_b a S_c postupně středy úseček AC a AB. Ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$ se body A, B, C, E ležící na kružnici k zobrazí na body A, S_c, S_b, D ležící na kružnici k' (obr. 4), přitom obrazem přímky p bude tečna BC kružnice k' v bodě D. Z mocnosti bodů B, C k této kružnici pak dostáváme $|BD|^2 = |BA| \cdot |BS_c| = \frac{1}{2}|BA|^2$ a $|CD|^2 = |CA| \cdot |CS_b| = \frac{1}{2}|CA|^2$. Dohromady tak pro obvod trojúhelníku ABC platí

$$|BC| + |AB| + |AC| = |BC| + \sqrt{2}(|BD| + |CD|) = |BC| + \sqrt{2} \cdot |BC| = 1 + \sqrt{2},$$

což je tedy (jediná možná) velikost obvodu trojúhelníku ABC.

Jiné řešení. V trojúhelníku ABC s bodem D uvnitř strany BC o stranách délek a, b, c označme $|BD| = m$, $|DC| = n$ a $|AD| = d$. Podle Stewartovy věty[1] pak platí

$$b^2 m + c^2 n = a(d^2 + mn).$$

Případ $d^2 = mn$ tak nastane, právě když bude platit

$$b^2 m + c^2 n = 2amn.$$

[1] Stewartovu větu lze odvodit užitím kosinové věty v trojúhelnících BAD a CAD (v obou případech vůči úhlu u vrcholu D) a následným vyloučením výrazů s kosinem.

V našem případě, kdy $a = 1$, zavedením $m = x$, $n = 1 - x$ pro $x \in (0, 1)$ získáme po úpravě rovnici
$$P(x) = 2x^2 + (b^2 - c^2 - 2)x + c^2 = 0.$$
Jelikož $P(0) = c^2 > 0$ a $P(1) = b^2 > 0$, nemůže mít $P(x) = 0$ dva různé kořeny, z nichž právě jeden leží v intervalu $(0, 1)$. Jediná možnost, jak zajistit jednoznačnost bodu D, je dvojnásobný kořen v intervalu $(0, 1)$. Podle Viètových vztahů musí tento dvojnásobný kořen splňovat $x^2 = \frac{1}{2}c^2$, čímž se o poloze bodu D dozvídáme, že nutně $m\sqrt{2} = c$. Zcela analogicky lze odvodit i rovnost $n\sqrt{2} = b$. Obvod trojúhelníku pak spočteme jako $a + b + c = 1 + (m + n)\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$.

---

6. *Na některé políčko šachovnice 6×6 postavíme figurku kralevice. Ta může v jednom tahu poskočit buďto ve svislém, nebo ve vodorovném směru. Délka tohoto skoku je střídavě jedno či dvě políčka, přičemž skokem na sousední pole figurka začíná. Rozhodněte, zda lze zvolit výchozí pozici figurky tak, aby po vhodné posloupnosti 35 skoků navštívila každé pole šachovnice právě jednou.* (Peter Novotný)

Řešení. Připusťme, že vhodná výchozí pozice a posloupnost 35 skoků existuje, a očíslujme políčka šachovnice podle následujícího schématu:

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Tahy délky jedna vedou z lichého čísla na sudé a naopak. Tahy délky dva vždy vedou ze sudého čísla na *jiné* sudé číslo a z lichého čísla na *jiné* liché číslo. Pokud navštívená políčka označíme $P_1, P_2, \ldots, P_{36}$, z uvedeného vyplývá, že mezi čtyřmi políčky P_2, P_3, P_4, P_5 je každé z čísel zastoupeno právě jednou (na P_2 a P_3 jsou různá čísla se stejnou paritou a podobně na P_4, P_5 s druhou paritou). Ze stejných důvodů je každé z čísel zastoupeno právě jednou ve čtveřicích políček P_{4k+2}, P_{4k+3}, P_{4k+4}, P_{4k+5} pro každé $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Mezi čísly na políčkách $P_2, P_3, \ldots, P_{33}$ je tak každé z čísel zastoupeno dohromady 8krát.

Číslo 4 je na šachovnici pouze 8krát, proto žádné z čísel na P_1, P_{34}, P_{35}, P_{36} nemůže být 4. Čísla na P_{34} a P_{35} mají stejnou paritu a jsou různá (dělí je skok délky 2). Jelikož na nich není číslo 4, musejí být obě lichá. Pak na políčku P_{36} musí být sudé číslo a stejně tak sudé číslo vychází i na políčko P_1. Na obou tak musí být číslo 2.

Počáteční políčko tedy musí být některé z vybarvených na levé šachovnici. Tento argument lze ovšem zopakovat i pro druhé očíslování vpravo, které je jen „otočením“ očíslování prvního. Jelikož žádné políčko není vybarveno zároveň na obou šachovnicích, došli jsme ke sporu. Šachovnici tak kýženým způsobem projít nelze, ať je počáteční políčko zvoleno jakkoli.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Jiné řešení. Předpokládejme, že popsaná posloupnost skoků kralevice existuje. Pokud tato posloupnost skoků začíná na černém poli ($\check{C}$), uvažujme posloupnost skoků souměrně s ní sdruženou podle jedné z os šachovnice rovnoběžné s její stranou. Taková posloupnost skoků kralevice opět vyhovuje zadání a začíná na bílém poli (B). Bez újmy na obecnosti tak můžeme předpokládat, že vyhovující posloupnost skoků začíná na bílém poli. V tom případě navštíví kralevic jednotlivá pole v pořadí

$$B\check{C}\check{C}BB\check{C}\check{C}BB\ldots\check{C}\check{C}BB\check{C}\check{C}B.$$

Označíme-li černá pole následujícím způsobem

1		1		1	
	2		2		2
1		1		1	
	2		2		2
1		1		1	
	2		2		2

je zřejmé, že v každé dvojici po sobě následujících tahů z černého pole na černé ($\check{C}\check{C}$) skočí kralevic z pole 1 na pole 1 a z pole 2 na pole 2. Popsaná posloupnost skoků kralevice tak obsahuje sudý počet polí 1 a sudý počet polí 2. Ovšem jak polí 1, tak polí 2 je na šachovnici 9, což odporuje existenci popsané posloupnosti skoků kralevice.