57. Mezinárodní matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Padesátý sedmý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 6. do 16. července 2016 v Hongkongu. Soutěže se po roce zúčastnil opět nový rekordní počet 602 soutěžících ze 109 zemí. Správní region Hongkong je tvořen čtyřmi oblastmi, Lantau, Hongkong, Kowloon a New Territories, z nichž první dva jsou ostrovy.

Vlastní soutěž probíhala v Kowloonu, v prostorách univerzity „Hong Kong University of Science and Technology“ (HKUST). Při přípravě 57. ročníku mezinárodní matematické olympiády byla hlavní hybnou silou hongkongská komise matematické olympiády. Do organizace se rovněž zapojila již zmíněná univerzita. Rozpočet činil 2 miliony dolarů.

Pro vedoucí národních delegací, kteří tvoří dohromady mezinárodní jury, začala olympiáda šestého července. Opět se upřesnila pravidla pro účast žáků na olympiádě a volili se někteří členové rady („advisory board“). Hlavní činnost členů jury však sestává v seznámení se s úlohami z tzv. shortlistu, tj. užšího výběru 32 úloh z návrhů zaslaných z různých zemí, zejména pak s jejich obtížností a krásou, a poté ve výběru šestice soutěžních úloh. Jednou z vybraných úloh byla i úloha *Bc. Josefa Tkadlece*, doktorského studenta na IST (Institute of Science and Technology) Vídeň. Je to úloha číslo šest a čtenář ji může najít dále v tomto článku.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Hongkongu 9. července. Byli ubytováni na kolejích univerzity HKUST. Po týdenním pobytu v hotelu se k nim připojili i vedoucí jednotlivých týmů.

České družstvo tvořili tito žáci: *Filip Bialas* z Gymnázia Opatov Praha 4, *Pavel Hudec* z Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského, Praha 1, *Jakub Löwit* z Gymnázia na Českolipské 373, Praha 9, *Daniel Pišťák* z Gymnázia Christiana Dopplera, Praha 5, *Marian Poljak* z Gymnázia Jakuba Škody v Přerově a *Pavel Turek* z Gymnázia Olomouc-Hejčín. Vedoucím českého týmu byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.* z Masarykovy univerzity v Brně, zástupcem vedoucího doprovázejícím studenty pak *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Slavnostní zahájení olympiády, stejně jako všechny ostatní společenské aktivity, bylo velkolepé, pečlivě zorganizované. Jako příklad uveďme zákaz používání vlajek při prezentaci družstev, na což jsou účastníci olympiády zvyklí. Účastnili se jej přední představitelé hongkongského veřejného života, včetně ministra vzdělávání Hongkongu (který je nyní součástí Čínské lidové republiky), má však status zvláštní správní oblasti). Velký prostor dostali hudebníci — orchestr a sbor čítaly dohromady přes tři sta lidí. Pro Evropana bylo nezvyklé velké zastoupení nejrůznějších bicích nástrojů.

Soutěžními dny byly 11. a 12. červenec. Účastníci každý z těchto dnů řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraven pestrý program. V rámci něj navštívili například hongkongský Disneyland. Vše bylo opět detailně naplánováno.

České družstvo dosáhlo velmi dobrých výsledků. V součtu jsme dosáhli 109 bodů, což v celkovém pořadí zemí stačilo na 37. pozici. Porazili jsme výrazně Slovensko, a byli jsme lepší i než Polsko, což je velké překvapení. Současně však mělo družstvo smůlu, neboť čtyřem účastníkům chyběl jeden bod k lepšímu hodnocení. Takto čeští účastníci vybojovali dvě stříbrné medaile (Filip Bialas a Pavel Hudec), jednu bronzovou (Pavel Turek) a dvě čestná uznání za bezchybně vyřešenou (alespoň) jednu úlohu (Marian Poljak a Jakub Löwit).

Maximálního zisku 42 bodů dosáhlo šest účastníků, tři Jihokorejci, dva Američané (*Liu a Yao*) a jeden Číňan reprezentující Čínu. V (neoficiální) soutěži družstev (pořadí je dáno součtem získaných bodů členů družstva) zvítězili Spojené státy americké před Jižní Koreou a Čínou. Kompletní výsledky můžete najít na
`https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2016`.

Příští, 58. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v Rio de Janeiru v Brazílii.

Uveďme ještě přehled absolutního pořadí, cen a bodových zisků českých (a slovenských) účastníků soutěže a na závěr celkové pořadí zúčastněných zemí.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu č.**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
45.–62.	Filip Bialas	7	7	0	7	7	0	28	S
45.–62.	Pavel Hudec	7	7	0	7	0	7	28	S
146.–169.	Pavel Turek	7	7	0	7	0	0	21	B
281.–311.	Marian Poljak	7	1	0	7	0	0	15	HM
379.–399.	Jakub Löwit	7	1	0	3	0	0	11	HM
469.–480.	Daniel Pišťák	1	0	0	5	0	0	6	
	Celkem	36	23	0	36	7	7	109	

Pro srovnání, které pro nás letos vyznívá nezvykle příznivě, uvádíme výsledky slovenského týmu:

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu č.**							**Cena**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
184.–204.	Tomáš Sásik	5	7	0	7	0	0	19	B
224.–252.	Peter Súkeník	7	0	0	7	3	0	17	B
312.–354.	Tomáš Kekeňák	7	0	0	7	0	0	17	HM
379.–399.	Zuzana Frankovská	7	0	0	4	0	0	11	HM
379.–399.	Samuel Sládek	1	0	0	7	2	0	10	HM
469.–480.	Slavomír Hanzely	5	2	0	0	0	0	7	
	Celkem	32	9	0	32	5	0	78	

Na následující stránce pak naleznete slibovanou tabulku pořadí zemí:

	Země	body	Medaile		
			G	S	B
1.	USA	214	6	0	0
2.	Jižní Korea	207	4	2	0
3.	Čína	204	4	2	0
4.	Singapur	196	4	2	0
5.	Taiwan	175	3	3	0
6.	Severní Korea	168	2	4	0
7.	Rusko	165	4	1	1
7.	Spoj. království	165	2	4	0
9.	Hongkong	161	3	2	1
10.	Japonsko	156	1	4	1
11.	Vietnam	151	1	4	1
12.	Kanada	148	2	2	1
12.	Thajsko	148	2	2	1
14.	Maďarsko	145	1	3	2
15.	Brazílie	138	0	5	1
16.	Itálie	138	1	3	0
17.	Filipíny	133	2	2	0
18.	Bulharsko	132	0	3	3
19.	Německo	131	0	3	3
20.	Indonézie	130	0	3	3
20.	Rumunsko	130	0	5	1
22.	Izrael	127	0	3	3
23.	Mexiko	126	0	4	1
24.	Írán	125	0	3	3
24.	Austrálie	124	0	2	4
24.	Francie	124	0	3	2
27.	Peru	124	0	2	3
28.	Kazachstán	122	1	1	3
29.	Turecko	121	0	2	4
30.	Arménie	118	0	1	4
30.	Chorvatsko	118	0	1	4
30.	Ukrajina	118	0	2	4
33.	Mongolsko	115	0	2	2
34.	Indie	113	0	1	5
35.	Bangladéš	112	0	1	3
35.	Bělorusko	112	0	1	4
37.	Česká republika	109	0	2	1
37.	Švédsko	109	0	3	0
39.	Macao	108	1	1	0
40.	Srbsko	106	0	1	4
41.	Saúdská Arábie	104	0	0	4
42.	Polsko	102	0	2	2
43.	Švýcarsko	99	0	1	4
44.	Nizozemí	98	0	0	3
45.	Bosna a Herceg.	97	0	0	4
46.	Rakousko	89	0	0	3
47.	Portugalsko	88	0	0	1
48.	Sýrie	87	0	0	3
49.	Španělsko	86	0	0	2
50.	Řecko	84	0	0	2
50.	Litva	84	0	0	3
52.	Belgie	82	0	0	3
53.	Nový Zéland	81	0	1	1
54.	Ázerbájdžán	79	0	0	1
55.	Slovensko	78	0	0	2

	Země	body	Medaile		
			G	S	B
56.	Malajsie	77	0	0	2
57.	Argentína	75	0	0	2
58.	Jižní Afrika	73	0	0	1
59.	Kostarika	69	0	0	2
59.	Gruzie	69	0	0	1
61.	Estonsko	67	0	0	1
62.	Tádžikistán	66	0	0	0
63.	Kypr	65	0	1	0
64.	Moldavsko	65	0	0	1
65.	Slovinsko	65	0	0	0
66.	Kolumbie	63	0	0	2
66.	Srí Lanka	63	0	0	1
68.	Salvádor	60	0	0	1
69.	Albánie	58	0	0	1
69.	Turkmenistán	58	0	0	0
71.	Finsko	55	0	0	0
72.	Paraguay	55	0	0	2
73.	Makedonie	53	0	0	0
74.	Lotyšsko	52	0	0	0
75.	Irsko	51	0	0	0
76.	Tunisko	50	0	0	0
77.	Kosovo	47	0	0	1
77.	Uzbekistán	47	0	0	1
79.	Maroko	46	0	0	1
80.	Nikaragua	45	0	0	1
81.	Dánsko	44	0	0	0
82.	Alžír	41	0	0	0
83.	Ekvádor	38	0	0	0
84.	Kyrgyzstán	34	0	0	0
85.	Norsko	34	0	0	0
86.	Venezuela	29	0	0	1
87.	Portoriko	27	0	0	1
88.	Černá Hora	24	0	1	0
88.	Nigérie	24	0	0	0
90.	Island	23	0	0	0
91.	Čile	18	0	0	0
91.	Pákistán	18	0	0	0
93.	Uruguay	17	0	0	1
94.	Trinidad a Tobago	15	0	0	0
95.	Lucembursko	14	0	0	0
96.	Kambodža	13	0	0	0
96.	Myanmar (Barma)	13	0	0	0
98.	Uganda	12	0	0	0
99.	Keňa	11	0	0	0
100.	Honduras	10	0	0	0
101.	Madagaskar	10	0	0	0
102.	Jamajka	9	0	0	0
103.	Botswana	7	0	0	0
104.	Egypt	5	0	0	0
104.	Ghana	5	0	0	0
106.	Tanzanie	3	0	0	0
107.	Irák	2	0	0	0
107.	Lichtenštejnsko	2	0	0	0
109.	Laos	0	0	0	0

Texty soutěžních úloh:

1. soutěžní den (11. 7. 2016)

Úloha 1. Trojúhelník BCF má pravý úhel u vrcholu B. Nechť A je bod na přímce CF takový, že $|FA| = |FB|$ a bod F leží mezi body A a C. Nechť D je bod takový, že $|DA| = |DC|$ a přímka AC je osou úhlu DAB. Dále nechť E je takový bod, že $|EA| = |ED|$ a přímka AD je osou úhlu EAC a nechť bod M je středem úsečky CF. Konečně nechť je X bod takový, že $AMXE$ je rovnoběžník (tedy $AM \parallel EX$ a $AE \parallel MX$). Dokažte, že přímky BD, FX a ME se protínají v jednom bodě.

(Belgie)

Úloha 2. Nalezněte všechna kladná celá n pro něž je možné tabulku $n \times n$ zaplnit písmeny I, M a O (do každého políčka právě jeden znak) tak, že:

- v každém řádku i každém sloupci je třetina písmen I, třetina M a třetina O,
- na každé diagonále, jejíž počet políček je dělitelný třemi, je rovněž třetina písmen I, třetina M a třetina O.

Poznámka: Řádky a sloupce tabulky jsou očíslovány čísly od 1 do n. Každé políčko tabulky tak odpovídá dvojici přirozených čísel (i, j), kde $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pro $n > 1$, má tabulka $4n - 2$ *diagonál* dvou typů. Diagonály prvního typu sestávají ze všech políček (i, j), pro která je $i + j$ konstantní, diagonály druhého typu jsou pak tvořeny všemi políčky, pro která je $i - j$ konstantní.

(Austrálie)

Úloha 3. V rovině je dán konvexní mnohoúhelník $P = A_1A_2 \ldots A_k$. Vrcholy A_1, A_2, $\ldots$, A_k mají celočíselné souřadnice a leží na kružnici. Nechť S je obsah k-úhelníka P. Dále je dáno liché kladné celé n takové, že čtverce délek stran mnohoúhelníka P jsou přirozená čísla dělitelná číslem n. Dokažte, že $2S$ je přirozené číslo dělitelné číslem n.

(Rusko)

2. soutěžní den (12. 7. 2016)

Úloha 4. Množinu kladných celých čísel nazveme *voňavou*, jestliže obsahuje alespoň dva prvky a libovolný její prvek má nějakého (i více) společného prvočíselného dělitele s alespoň jedním jiným jejím prvkem. Uvažme polynom $P(n) = n^2+n+1$. Určete nejmenší celé kladné b, pro které existuje celé nezáporné a tak, že množnina

$$\{P(a + 1), P(a + 2), \ldots, P(a + b)\}$$

je voňavá.

(Lucembursko)

Úloha 5. Na tabuli je napsána rovnice

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

sestávající z 2016 lineárních členů na každé straně. Určete minimální přirozené k, pro které je možné smazat právě k z těchto 4032 lineárních členů tak, že na každé straně zůstane alespoň jeden člen a výsledná rovnice nebude mít reálné řešení.

(Rusko)

Úloha 6. V rovině je dáno n, $n \geqslant 2$, úseček tak, že se libovolné dvě z nich protínají ve vnitřním bodě obou, ale žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Pepa vybere koncový bod každé úsečky a umístí do něj žábu, směrem k druhému koncovému bodu. Poté $(n-1)$-krát tleskne. Na každé tlesknutí každá žába neprodleně poskočí na následující průsečík na své úsečce. Žádná žába nemění směr svých skoků. Pepa by chtěl umístit žáby tak, aby žádné dvě z nich nebyly po žádném tlesknutí ve stejném průsečíku.

(1) Dokažte, že Pepa tak může učinit, je-li n liché.
(2) Dokažte, že Pepa tak nemůže učinit, je-li n sudé.

(Česká republika)