10. Středoevropská matematická olympiáda

Jubilejní, desátý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se konal ve dnech 22. – 28. srpna 2016 v rakouském Vöcklabrucku. Soutěže se zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarska, Německa, Slovinska, Chorvatska, Maďarska, Slovenska, Litvy, Polska, České republiky a pořádajícího Rakouska). Každou zemi reprezentovalo šestičlenné družstvo složené z žáků, kteří v uplynulém školním roce nematurovali. České reprezentační družstvo bylo složeno ze tří vítězů a tří úspěšných řešitelů ústředního kola 65. ročníku v kategorii A, kteří splňovali podmínky této mezinárodní soutěže a nezúčastnili se 57. IMO v Hong Kongu.

Složení českého týmu na 10. MEMO bylo následující: *Lenka Kopfová* (1/4 MG Opava), *Danil Koževnikov* (6/8 GJK Praha 6), *Jan Petr* (7/8 GJK Praha 6), *Ondřej Motlíček* (7/8 G Šumperk), *Martin Raška* (6/8 WG Ostrava-Poruba) a *Ondřej Svoboda* (7/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.,* z FIT ČVUT Praha, pedagogickým vedoucím družstva byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Den před soutěží jednotlivců provedla mezinárodní jury definitivní výběr všech 12 soutěžních úloh, a to po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel pro soutěž jednotlivců, a dále pak po dvou jiných úlohách ze stejných oblastí pro týmovou soutěž. Individuální soutěž se konala ve středu 24. srpna, týmová soutěž proběhla o jeden den později. Po oba dny se přitom soutěžilo v učebnách Bundesrealgymnasia Schloß Wagrain ve Vöcklabrucku.

Následující dva dny po soutěži družstev probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Každá soutěžní úloha byla přitom hodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovacím schématem v rozpětí 0–8 bodů. Soutěžící se svými rakouskými průvodci však v pátek 26. srpna absolvovali společný výlet do Linze, kde byli přijati na tamní radnici a poté navštívili místní univerzitu. Na poslední den pobytu v Rakousku, kterým byla sobota 27. srpna, připravili rakouští organizátoři pro všechny účastníky soutěže společný jednodenní výlet spojený s turistickou procházkou z Obertraunu kolem Halštatského jezera (Hallstatter See) s překrásnými výhledy na úbočí Dachsteinu.

Ihned po návratu byli na závěrečném slavnostním večeru (za přítomnosti náměstkyně rakouské federální ministryně pro vzdělávání *Sonji Hammerschmidové*) oficiálně vyhlášeni vítězové soutěže jednotlivců i soutěže družstev. V soutěži jednotlivců bylo letos uděleno 6 zlatých, 9 stříbrných a 16 bronzových medailí. Dva naši soutěžící – *Danil Koževnikov* a *Jan Petr* – získali stříbrné medaile a dále jediná soutěžící dívka v celé soutěži – *Lenka Kopfová* – si domů přivezla medaili bronzovou. Cenného, historicky dosud nejlepšího výsledku v soutěži družstev dosáhlo české reprezentační družstvo, které skončilo na vynikajícím 3. místě za družstvy Chorvatska a Polska, avšak před silnými celky Německa, Maďarska a dalšími středoevropskými týmy. Všichni členové našeho družstva tak převzali na slavnostím vyhlášení výsledků z rukou *prof. Gerda Barona*, rakouského iniciátora vzniku MEMO, bronzové medaile.

Podrobnější informace doplněné fotogalerií ze soutěže mohou zájemci nalézt na oficiálních stránkách 10. MEMO (www.math.aau.at/MEMO2016).

Na závěr uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců

(24. srpna 2016)

Příklad I–1

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla splňující současně podmínky

(a) $x_j > -1$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$,

(b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Dokažte nerovnost
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$
a určete, kdy nastane rovnost.

(*Rakousko*)

Příklad I–2

Na tabuli je napsáno n ($n \geq 3$) přirozených čísel. V jednom kroku vybereme na tabuli tři čísla a, b, c, která jsou délkami stran nedegenerovaného, nerovnostranného trojúhelníku, a nahradíme je čísly $a+b-c$, $b+c-a$ a $c+a-b$. Dokažte, že neexistuje nekonečná posloupnost těchto kroků.

(*Švýcarsko*)

Příklad I–3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|\sphericalangle BAC| > 45°$ a O značí střed kružnice jemu opsané. Bod P je takovým vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, že body A, P, O, B leží na téže kružnici a přímka BP je kolmá k CP. Bod Q je takovým bodem úsečky BP, že přímka AQ je rovnoběžná s PO. Dokažte, že $|\sphericalangle QCB| = |\sphericalangle PCO|$.

(*Slovensko*)

Příklad I–4

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ je číslo $2(a+b-1)$ dělitelné číslem $f(a)+f(b)$.

Poznámka. Symbol $\mathbb{N}$ značí množinu všech přirozených čísel, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(*Chorvatsko*)

Soutěž družstev

(25. srpna 2016)

Příklad T–1

Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

(*Chorvatsko*)

Příklad T–2

Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2).$$

(*Litva*)

Příklad T–3

Čtverecové území 8×8, jehož strany jsou orientovány ve směrech sever–jih a východ–západ, je složena ze 64 parcel 1×1. Na každé parcele může být postaven nejvýše jeden dům, jehož základy jsou shodné právě s touto parcelou.

Řekneme, že dům je ve *slunečním stínu*, právě když existují tři domy na parcelách bezprostředně s ním sousedících současně na východě, jihu i na západě.

Jaký maximální počet domů lze současně postavit na daném čtvercovém území tak, aby žádný z nich nebyl ve slunečním stínu?

Poznámka. Domy na východní, jižní a západní straně celého území nejsou ve slunečním stínu.

(*Chorvatsko*)

Příklad T–4

Žáci střední školy psali test. Každá otázka byla hodnocena buď jedním bodem za správnou odpověď, nebo žádným bodem za chybnou odpověď. Každá otázka byla správně zodpovězena aspoň jedním žákem a přitom aspoň dva žáci nezískali na závěr stejný počet bodů. Dokažte, že existovala taková otázka, že žáci, kteří ji zodpověděli správně, dosáhli v průměru vyššího počtu bodů než ti, kteří ji zodpověděli chybně.

(*Rakousko*)

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$ a O je střed kružnice ω jemu opsané. Přímka AO protíná kružnici ω v dalším bodě D a přímku BC v bodě E. Kružnice opsaná trojúhelníku CDE protíná přímku

CA v dalším bodě P. Přímka PE protíná přímku AB v bodě Q. Rovnoběžka s přímkou PE procházející bodem O protíná výšku trojúhelníku ABC z vrcholu A v bodě F.

Dokažte, že $|FP| = |FQ|$.

(*Chorvatsko*)

Příklad T–6

Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$. Středy jeho stran BC, CA, AB označme po řadě K, L, M. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC, která má střed I, se dotýká strany BC v bodě D. Přímka g procházející středem úsečky ID,která je kolmá k přímce IK, protíná přímku LM v bodě P.

Dokažte, že $|\sphericalangle PIA| = 90°$.

(*Polsko*)

Příklad T–7

Přirozené číslo n nazveme *mozartovským*, právě když v posloupnosti čísel $1, 2, \ldots, n$ je každá číslice desítkové soustavy použita v sudém počtu. Dokažte tvrzení:

a) Každé mozartovské číslo je sudé.

b) Existuje nekonečně mnoho mozartovských čísel.

(*Slovensko*)

Příklad T–8

Uvažujme rovnici $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte tvrzení:

a) Pro $n = 2017$ neexistuje řešení (a, b, c).

b) Pro $n = 2016$ je číslo a dělitelné třemi pro každé řešení (a, b, c).

c) Pro $n = 2016$ má daná rovnice nekonečně mnoho řešení (a, b, c).

(*Rakousko*)

Následující (11.) ročník MEMO se bude konat na základě oficiálního pozvání v roce 2017 v Litvě.

Vedení českého reprezentačního týmu děkuje přerovské firmě MEOPTA a brněnské firmě Neogenia za jejich sponzorskou pomoc při zajištění jednotného oblečení všech členů reprezentačního družstva pro 10. MEMO.

Jaroslav Švrček