66. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Najděte všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že $p^n + 1$ je třetí mocninou některého přirozeného čísla.*

ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že pro přirozené číslo a platí $p^n + 1 = a^3$ (zjevně $a \geqq 2$). Tuto rovnost upravíme tak, aby bylo možné jednu stranu rozložit na součin:

$$p^n = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1).$$

Z tohoto rozkladu plyne, že pokud $a > 2$, jsou čísla $a - 1$ i $a^2 + a + 1$ mocninami prvočísla p (s kladnými celočíselnými exponenty).

V případě $a > 2$ tak platí $a - 1 = p^k$ neboli $a = p^k + 1$ pro kladné celé číslo k, což po dosazení do trojčlenu $a^2 + a + 1$ dává hodnotu $p^{2k} + 3p^k + 3$. Jelikož $a - 1 = p^k < a^2 + a + 1$, je určená hodnota trojčlenu $a^2 + a + 1$ vyšší mocninou prvočísla p, zaručeně proto platí

$$p^k \mid p^{2k} + 3p^k + 3 \quad \text{neboli} \quad p^k \mid 3.$$

Odtud plyne, že musí být $p = 3$ a $k = 1$, a tedy $a = p^k + 1 = 4$. Číslo $a^2 + a + 1 = 21$ však není mocninou tří, a tak v případě $a > 2$ žádné prvočíslo p rovnici $p^n + 1 = a^3$ nevyhovuje, ať je exponent n zvolen jakkoli.

Pro $a = 2$ dostáváme rovnici $p^n = 7$, proto je $p = 7$ jediné vyhovující prvočíslo.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[62–B–I–1]

N2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takové, že $ab = a + b$. [Všechny členy dáme na levou stranu a rozložíme ji na součin: $(a - 1)(b - 1) = 1$. Je jen jeden způsob, jak napsat číslo 1 na pravé straně jako součin dvou nezáporných celých čísel, proto $a = b = 2$.]

N3. Najděte všechna prvočísla p, pro která existuje přirozené číslo x takové, že $p^5 + 4 = x^2$. [Zřejmě $x > 2$ a z upravené rovnice $p^5 = (x - 2)(x + 2)$ s ohledem na $x + 2 > x - 2 > 0$ plyne, že dvojice $(x + 2, x - 2)$ je buď $(p^5, 1)$, (p^4, p), nebo (p^3, p^2). V prvním případě je $p^5 - 1 = 4$, ve druhém $p^4 - p = 4$, avšak žádná z obou rovnic nemá prvočíselné řešení. Zbývá možnost $p^3 - p^2 = 4$, která dává $p = 2$ a $x = 6$.]

D1. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že

$$\frac{pq}{p + q} = \frac{a^2 + 1}{a + 1}.$$

[62–A–I–1]

D2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x + y}$$

je prvočíslo. [58–A–I–3]

D3. Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n není číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslem. [Slovenská verze 57–A–III–4, `https://skmo.sk/dokument.php?id=215`]

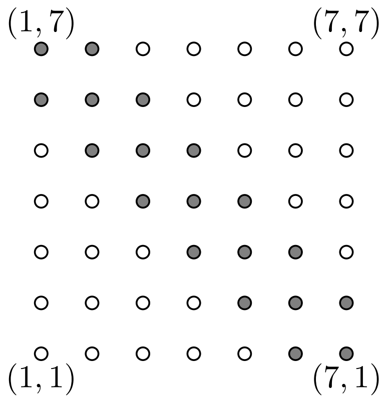
D4. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. [61–A–III–1]

2. *Máme n^2 prázdných krabic; každá z nich má čtvercové dno. Výška i šířka každé krabice je přirozené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Každé dvě krabice se liší alespoň v jednom z těchto dvou rozměrů. Jednu krabici je dovoleno vložit do druhé, má-li oba rozměry menší a alespoň jeden z rozměrů má alespoň o 2 menší. Takto můžeme vytvořit posloupnost krabic vložených navzájem do sebe (tj. první krabice je uvnitř druhé, druhá krabice je uvnitř třetí atd.). Každou takovou sadu uložíme na jinou poličku. Určete nejmenší možný počet poliček potřebný k uskladnění všech n^2 krabic.*

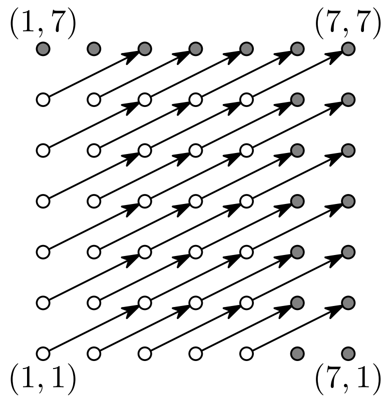
Řešení. Ukážeme, že hledaný minimální počet poliček je roven $3n-2$. Tato odpověď je zřejmě správná pro $n = 1$ a pro $n = 2$, neboť pro taková n platí $n^2 = 3n-2$ a současně každá z n^2 krabic musí být v takovém případě očividně uložena na jiné poličce. V celém dalším řešení budeme proto předpokládat, že $n \geqq 3$.

Krabicím přiřadíme tabulku $n \times n$ — krabici s šířkou w a výškou h v ní bude odpovídat bod o souřadnicích (w, h).

Žádné dvě krabice z množiny $\mathsf{S} = \{(w, h)\colon n \leqq w+h \leqq n+2\}$ (tři nejdelší diagonály, na obr. 1 pro $n = 7$) nemohou být na jedné poličce. Pokud totiž jsou (w, h) a (w', h') dvě krabice na jedné poličce, pro které platí $w < w'$ a $h < h'$, platí i $w+1 \leqq w'$ a $h+1 \leqq h'$ a navíc musí být $w + 2 \leqq w'$ nebo $h + 2 \leqq h'$. V obou případech dostaneme sečtením $w + h + 3 \leqq w' + h'$. Pokud tedy $(w, h) \in \mathsf{S}$, bude $w' + h' \geqq w + h + 3 \geqq n + 3$, tudíž $(w', h') \notin \mathsf{S}$. Jelikož $|\mathsf{S}| = 3n - 2$, poliček musí být alespoň $3n - 2$.



Obr. 1

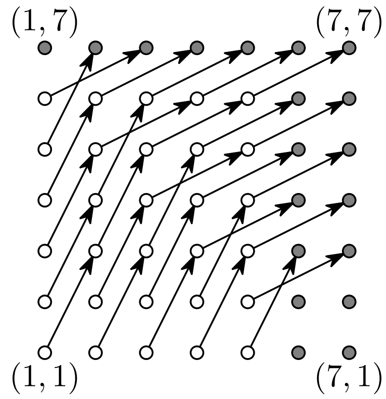


Obr. 2

Nyní ukážeme, jak rozdělit krabice do poliček tak, aby stačilo $3n-2$ poliček. Možný postup pro $n = 7$ je patrný z obr. 2 (sady do sebe vložených krabic jsou vyznačeny šipkami) a lze ho přímo zobecnit na případ libovolného $n \geqq 3$. I tehdy dvě krabice (w, h) a (w', h') dáme na stejnou poličku, právě když $2(h' - h) = w' - w$. Jinými slovy, začneme s „největšími“ krabicemi $(n - 1, h)$, (n, h) pro $h = 1, 2, \ldots, n$ a (w, n) pro $w = 1, 2, \ldots, n - 2$ a každou z těchto $3n - 2$ krabic položíme na zvláštní poličku. Pak na každé poličce provedeme následující algoritmus: Podíváme se na poslední krabici položenou na poličce, nechť je to (w, h). Pokud $w-2 \geqq 1$ a $h-1 \geqq 1$, přidáme na poličku krabici $(w-2, h-1)$ (tj. vložíme ji do krabice na poličce) a krok algoritmu zopakujeme (jinak skončíme). Zadaná pravidla jsou pro každou poličku splněna triviálně. Hodnota $3n - 2$ je proto opravdu dosažitelná.

Zbývá vysvětlit, proč je každá z n^2 krabic uložena na nějaké poličce. Pro danou krabici (w, h) určíme poličku, na které se ocitne, postupným současným zvětšováním w o 2 a h o 1, až nakonec dostaneme jednu z $3n - 2$ výchozích největších krabic s šířkou $w \in \{n-1, n\}$ či výškou $h = n$. Při tomto postupu zvětšování dostaneme podle naší procedury posloupnost do sebe vložených krabic uložených na poličce, kterou jsme úvodem přiřadili zmíněné největší krabici. Počet $3n-2$ krabic je proto opravdu postačující.

Poznámka. Je zajímavé, že existují i jiná vyhovující uložení všech n^2 krabic se stejnou sadou $3n-2$ největších krabic v jednotlivých políčkách, kterou jsme využili v našem řešení — pro $n=7$ je jedno takové odlišné uložení znázorněno na obr. 3.



Obr. 3

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dvě pole na šachovnici nazveme sousední, pokud mají společnou stranu. Kolik nejvíce polí lze vybrat na šachovnici $2n \times 2n$ tak, aby žádné dvě z vybraných polí nebyly sousední? [Polovinu. Celá šachovnice se dá rozdělit na disjunktní dvojice sousedních polí a z každé dvojice můžeme vybrat maximálně jedno pole. Polovina se dá dosáhnout např. výběrem všech polí jedné barvy při klasickém obarvení šachovnice.]

N2. Vyřešte zadaný úkol pro $n=4$ a $n=5$. Nestačí uhodnout minimální počet políček: je třeba jednak ukázat, že je možné krabice na určený počet políček uložit, jednak zdůvodnit, že menší počet políček nebude stačit.

N3. Pro $n \in \{3,4\}$ najděte co největší sadu krabic takovou, že žádnou z nich nelze vložit do jiné. Zkuste svou sadu zobecnit pro větší n.

D1. Výborným doplňujícím materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) je kapitola 3.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce `http://kms.sk/zbierka`.

3. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, právě když platí rovnost*

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

ŘEŠENÍ. Body K, L, M jsou definovány jako paty výšek a my potřebujeme vyjádřit kolmost tak, aby se s ní dobře pracovalo; jelikož dokazované tvrzení pracuje s délkami úseček, a ne s úhly, zapíšeme určující vlastnost bodů K, L, M pomocí délek úseček.

Protože přímky AB a CM jsou na sebe kolmé, je $|AC|^2 - |BC|^2 = |AM|^2 - |BM|^2$. (To plyne z Pythagorovy věty použité na pravoúhlé trojúhelníky AMC a BMC, neboť $|AC|^2 = |AM|^2 + |CM|^2$, $|BC|^2 = |BM|^2 + |CM|^2$.) Z této rovnosti hned vyplývá, že při standardním označení délek stran trojúhelníku ABC platí

$$|AM| - |BM| = \frac{b^2 - a^2}{|AM| + |BM|} = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

a analogicky

$$|BK| - |CK| = \frac{c^2 - b^2}{a} \qquad \text{a} \qquad |CL| - |AL| = \frac{a^2 - c^2}{b}.$$

Rovnost ze zadání se tedy dá přepsat jako

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{b^2-c^2}{a}+\frac{c^2-a^2}{b}=0,$$
$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=0.$$

Pokusme se výraz na levé straně rozložit na součin. Budeme se na něj dívat jako na kubický mnohočlen P v proměnné a. Je snadné ověřit, že pro rovnoramenný trojúhelník je levá strana nulová, proto $P(b)=0$ a $P(c)=0$. Známe tedy dva kořeny mnohočlenu P. Po vydělení $P(a)$ odpovídajícími kořenovými činiteli (tedy výrazem $(a-b)(a-c)$) už zůstane jen lineární mnohočlen $a(b-c)+b^2-c^2$, který snadno rozložíme na součin. Když to vše shrneme, vidíme, že rovnost ze zadání je ekvivalentní s rovností

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=0.$$

Je jasné, že získaná rovnost platí, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, že tedy například bez újmy na obecnosti $|AC|=|BC|$. Z osové souměrnosti trojúhelníku ABC pak plynou rovnosti $|AM|=|BM|$, $|AL|=|BK|$ a $|CL|=|CK|$, takže rovnost ze zadání je splněna.

Předpokládejme nyní naopak, že platí rovnost ze zadání. Přepíšeme ji do tvaru

$$(|AM|-|BM|)+(|BK|-|CK|)+(|CL|-|AL|)=0. \tag{1}$$

Při standardním označení délek stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC s poloměrem r kružnice opsané platí

$$|AM|-|BM|=b\cos\alpha-a\cos\beta=2r\sin\beta\cos\alpha-2r\sin\alpha\cos\beta=2r\sin(\beta-\alpha),$$

a proto z rovnosti (1) plyne

$$\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\beta)=0. \tag{2}$$

Díky goniometrickému pravidlu

$$x+y+z=0\Rightarrow\sin x+\sin y+\sin z=-4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}, \tag{3}$$

které za okamžik dokážeme, z rovnosti (2) plyne

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Taková rovnost zřejmě nastane, jen když se některé dva z vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku ABC rovnají neboli trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Zbývá tedy ověřit pravidlo (3). Za předpokladu $x+y+z=0$ platí

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin(x+y)=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot(-2)\cdot\sin\frac{(x-y)+(x+y)}{4}\sin\frac{(x-y)-(x+y)}{4}=\\&=-4\sin\frac{-z}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{-y}{2}=-4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.\end{aligned}$$

Důkaz je hotov.

Jiné řešení. Ještě jedním algebraickým postupem ukážeme, že za předpokladu

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK| \tag{1}$$

je trojúhelník ABC rovnoramenný. Stejně jako v prvním řešení k tomu nejprve využijeme rovnosti

$$\begin{aligned}|AM|^2 - |BM|^2 &= |AC|^2 - |BC|^2,\\ |BK|^2 - |CK|^2 &= |AB|^2 - |AC|^2,\\ |CL|^2 - |AL|^2 &= |BC|^2 - |AB|^2,\end{aligned}$$

jejichž sečtením dostaneme po úpravě

$$|AM|^2 + |BK|^2 + |CL|^2 = |AL|^2 + |BM|^2 + |CK|^2. \tag{2}$$

Protože výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem, platí podle Cévovy věty rovněž rovnost

$$|AM| \cdot |BK| \cdot |CL| = |AL| \cdot |BM| \cdot |CK|. \tag{3}$$

Povšimneme si ještě, že díky algebraické identitě

$$(u + v + w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu)$$

plyne z (1) a (2) poslední potřebná rovnost

$$|AM| \cdot |BK| + |BK| \cdot |CL| + |CL| \cdot |AM| = |AL| \cdot |BM| + |BM| \cdot |CK| + |CK| \cdot |AL|. \tag{4}$$

Nyní z rovností (1), (3), (4) učiníme rozhodující algebraický závěr: protože kubická rovnice s trojicí kořenů

$$|AM|,\ |BK|,\ |CL|$$

je rovněž kubickou rovnicí s trojicí kořenů

$$|AL|,\ |BM|,\ |CK|,$$

jsou obě trojice kořenů stejné (až na pořadí, v jakém jsme kořeny vypsali).

Z předpokladu (1) jsme tak odvodili, že úsečka AM je shodná s jednou z úseček AL, BM, CK. Je zřejmé, že tyto tři možnosti nastanou právě v případech, kdy platí $|AB| = |AC|$, $|AC| = |BC|$, resp. $|AB| = |BC|$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že přímky AB a CD ležící v jedné rovině jsou na sebe kolmé, právě když platí $|AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |BD|^2$. [Stačí dokázat, že pokud A, B jsou dva různé body v rovině a k je reálné číslo, je množinou bodů X takových, že $|AX|^2 - |BX|^2 = k$, přímka kolmá na přímku AB. V důkazu tohoto tvrzení stačí uvažovat patu P kolmice z bodu X na přímku AB a použít Pythagorovu větu v trojúhelnících APX a BPX; dostaneme $|AX|^2 - |BX|^2 = (|AP|^2 + |PX|^2) - (|BP|^2 + |PX|^2) = |AP|^2 - |BP|^2$. Pokud je hodnota $|AX|^2 - |BX|^2$ konstantní, je pata kolmice z X na AB vždy stejná pro všechny body X, leží tedy na přímce kolmé na AB. Obrácením úvahy hned vidíme, že každý bod této přímky má požadovanou vlastnost.]

N2. Dokažte, že pro libovolný mnohočlen $P(x)$ a libovolné reálné číslo r platí následující tvrzení: pokud $P(r) = 0$, je mnohočlen $P(x)$ dělitelný dvojčlenem $x - r$. [Po vydělení $P(x)$ činitelem $x - r$ dostaneme podíl $Q(x)$ a zbytek $R(x)$, který má menší stupeň než $x - r$, musí to tedy být konstantní mnohočlen. Po dosazení $x = r$ do rovnosti $P(x) = (x - r)Q(x) + R(x)$ máme $R(r) = 0$, čili zbytek je nulový polynom.]

N3. Rozložte na součin výraz $bc^2-b^2c+ca^2-c^2a+ab^2-a^2b$. [$(a-b)(b-c)(c-a)$. Považujte daný výraz za mnohočlen v proměnné a a všimněte si, že b i c jsou jeho kořeny. Nebo trochu pracněji: $bc^2-b^2c+ca^2-c^2a+ab^2-a^2b = bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a) = bc(c-b)-abc+abc+ca(a-c)+ab(b-a) = bc(c-b-a)+ca(b+a-c)+ab(b-a) = c(b+a-c)(a-b)+ab(b-a) = (a-b)(bc-c^2+ca-ab) = (a-b)(b-c)(c-a)$.]

D1. Uvnitř strany AB libovolného trojúhelníku ABC leží bod D. Dokažte, že platí

$$|AB|\cdot|CD|^2+|AB|\cdot|AD|\cdot|BD| = |BC|^2\cdot|AD|+|AC|^2\cdot|BD|.$$

[Tento fakt je znám jako Stewartova věta. Pro trojúhelníky ADC, BDC zapište kosinovou větu s úhly ADC, BDC a využijte k eliminaci jejich kosinů toho, že jsou to dvě navzájem opačná čísla.]

D2. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí $a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 = a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$, mají některá dvě z čísel a, b, c stejné absolutní hodnoty. [$L-P = (a^2-b^2)(b^2-c^2)\times\times(c^2-a^2)$]

4. *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí*

$$f(d_1)\cdot f(d_2)\cdot\ldots\cdot f(d_n) = m.$$

Řešení. Ukážeme, že jediným řešením je funkce f taková, že

$$f(m) = \begin{cases} p, & \text{pokud } m \text{ je netriviální mocninou prvočísla } p, \text{ tj. } m=p^k,\ k\geqq 1,\\ 1 & \text{v ostatních případech.}\end{cases}$$

Číslo 1 má jediného přirozeného dělitele 1, proto ze zadané rovnosti pro $m=1$ plyne $f(1)=1$.

Nechť $m=p$ je prvočíslo. Potom musí platit

$$f(1)\cdot f(p) = p \quad\text{neboli}\quad f(p)=p.$$

Pro $m=p^2$ pak dostaneme

$$f(1)\cdot f(p)\cdot f(p^2) = p^2 \quad\text{neboli}\quad f(p^2)=p$$

a obecně pro přirozené $k>1$ a $m=p^k$

$$f(1)\cdot f(p)\cdot f(p^2)\cdot\ldots\cdot f(p^k) = p^k.$$

Matematickou indukcí podle k tak snadno ukážeme, že pro všechna přirozená čísla k musí platit $f(p^k)=p$.

Uvažujme nyní přirozené číslo m s alespoň dvěma různými prvočíselnými děliteli, jehož prvočíselný rozklad je $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, kde $k\geqq 2$ a $\alpha_i\geqq 1$ pro každé $i\in\in\{1,2,\dots,k\}$. Mezi děliteli čísla m jsou určitě všechny mocniny

$$p_1, p_1^2, \dots, p_1^{\alpha_1},\ p_2, p_2^2, \dots, p_2^{\alpha_2},\ \dots,\ p_k, p_k^2, \dots, p_k^{\alpha_k}$$

jeho jednotlivých prvočinitelů, přitom jenom samotný součin odpovídajících funkčních hodnot

$$f(p_1)f(p_1^2)\ldots f(p_1^{\alpha_1})f(p_2)f(p_2^2)\ldots f(p_2^{\alpha_2})\ldots f(p_k)f(p_k^2)\ldots f(p_k^{\alpha_k}) = \\ = \underbrace{p_1p_1\ldots p_1}_{\alpha_1}\underbrace{p_2p_2\ldots p_2}_{\alpha_2}\ldots\underbrace{p_kp_k\ldots p_k}_{\alpha_k} = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k} = m$$

dává, jak vidíme, hodnotu m. To znamená, že součin všech dalších funkčních hodnot zbývajících dělitelů (z nichž ani jeden není netriviální mocninou prvočísla) včetně hodnoty $f(m)$ musí být roven 1, takže všichni činitelé nevyjímaje $f(m)$ se rovnají 1.

Tím je hledaná funkce f jednoznačně určena a zároveň je z poslední rovnosti zřejmé, že má požadované vlastnosti.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte matematickou indukcí, že každé přirozené číslo větší než 1 se dá rozložit na prvočinitele.

N2. Určete hodnoty funkce f, která splňuje podmínku ze zadání, pro mocniny trojky.

N3. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = 2^n.$$

[Matematickou indukcí lze dokázat, že $f(x) = 2$ pro každé přirozené číslo x. Pokud si označíme dělitele čísla m vzestupně podle velikosti $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_n = m$, máme z indukčního předpokladu $2^{n-1} f(m) = 2^n$ neboli $f(m) = 2$.]

D1. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2\,006).$$

[56–A–I–6]

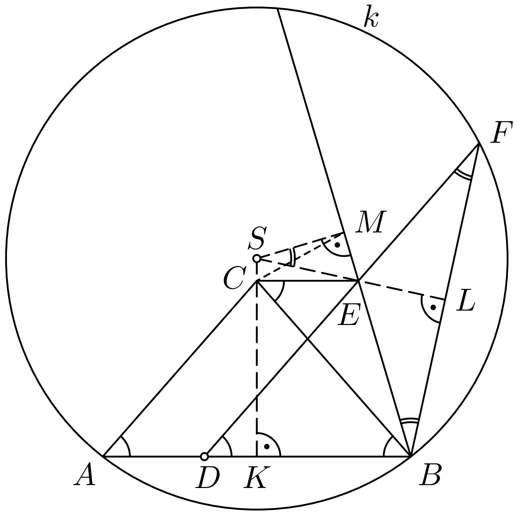
D2. Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2\,007)$. [56–A–III–3]

5. *Uvnitř základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC leží bod D. Zvolme bod E tak, aby $ADEC$ byl rovnoběžník. Na polopřímce opačné k ED leží bod F takový, že $|EB| = |EF|$. Dokažte, že délka tětivy, kterou vytíná přímka BE v kružnici opsané trojúhelníku ABF, je dvojnásobkem délky úsečky AC.*

Řešení. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABF a K, L, M paty kolmic z bodu S na přímky AB, BF, BE. Jak snadno ověříme, úhel ABF je tupý, bod S leží na ose CK strany AB uvnitř poloroviny opačné k CEB a bod E leží uvnitř úsečky SL, takže je vnitřním bodem úsečky BM (obr. 4). Protože bod M je středem zmíněné tětivy a $|AC| = |BC|$, stačí ukázat, že $|BM| = |BC|$.



Obr. 4

Označme α a β velikosti úhlů při základnách rovnoramenných trojúhelníků ABC a BFE. Protože $|\sphericalangle BDF| = \alpha$, z trojúhelníku DBF máme

$$|\sphericalangle CBM| = 180^\circ - 2(\alpha + \beta). \tag{1}$$

Z rovnoběžnosti $CE \parallel AB$ dále plyne, že je také $|\sphericalangle BCE| = \alpha$, a ze zřejmé podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $SEM \sim BEL$ máme $|\sphericalangle ESM| = \beta$. A protože CE je stejně jako AB kolmé na SK, je čtyřúhelník $CEMS$ tětivový, takže $|\sphericalangle ECM| = |\sphericalangle ESM| = \beta$. Celkem tedy pro velikosti úhlů BCM a BMC dostáváme

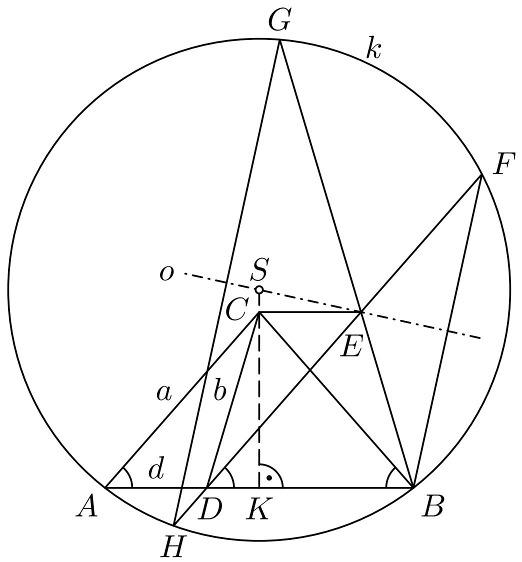
$$|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle ECM| = \alpha + \beta$$

a podle (1) můžeme dopočítat

$$|\sphericalangle BMC| = 180^\circ - |\sphericalangle CBM| - |\sphericalangle BCM| = 2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = \alpha + \beta.$$

v trojúhelníku BCM tedy platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BCM|$. Proto $|BM| = |BC|$.

Jiné řešení. Využijeme souměrnost podle osy o úsečky BF. Na přímce o leží bod E i střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABF. Tětiva, kterou vytíná přímka BE v kružnici k, se ve zmíněné osové souměrnosti zobrazí na úsečku FH, kde H je průsečík přímky FE s kružnicí k různý od F (obr. 5).



Obr. 5

Protože $|DE| = |AC|$, je potřeba dokázat, že $|HD| + |DF| = 2|AC|$.

Označme $|AC| = |BC| = a$, $|AB| = c$, $|AD| = d$, $|CD| = b$.

Čtyřúhelník $DBEC$ je díky shodným úhlům CBD a EDB osově souměrný, je to tudíž rovnoramenný lichoběžník nebo pravoúhelník, proto platí také $|BE| = |CD| = b$ a

$$\begin{aligned} |DF| &= |DE| + |EF| = |AC| + |BE| = \\ &= |AC| + |CD| = a + b. \end{aligned} \tag{1}$$

Je tudíž potřeba dokázat, že

$$|HD| = 2|AC| - |DF| = 2a - (a + b) = a - b. \tag{2}$$

Z mocnosti bodu D ke kružnici k plyne

$$|HD| \cdot |DF| = |AD| \cdot |BD| = d(c - d)$$

což je podle (1) ekvivalentní rovnosti

$$|HD| = \frac{d(c - d)}{a + b}. \tag{3}$$

Porovnáním s (2) tak dostáváme, že má platit

$$d(c - d) = a^2 - b^2. \tag{4}$$

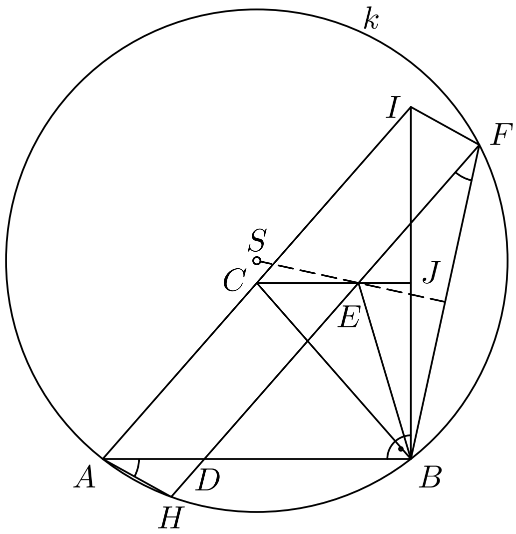
Pro $D = K$, kde K značí střed úsečky AB (a zároveň patu kolmice z bodu C na AB), je $c = 2d$ a poslední rovnost se tak změní v Pythagorovu větu pro trojúhelník AKC. Pro $D \neq K$ pak z Pythagorovy věty použité na trojúhelníky DKC a AKC plyne

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (|AK|^2 + |KC|^2) - (|DK|^2 + |KC|^2) = |AK|^2 - |DK|^2 = \\ &= \big||AK| - |DK|\big|(|AK| + |DK|) = d(c-d), \end{aligned}$$

bez ohledu na polohu bodu D uvnitř AB. Tím je dokázána rovnost (4), tudíž je dokázáno i tvrzení úlohy.

Poznámka. Rovnost (4) je přímým důsledkem Ptolemaiovy věty použité v tětivovém lichoběžníku $DBEC$, jehož obě úhlopříčky mají délku a, ramena délku b a základny délky $c - d$ a d.

Jiné řešení. Tak jako v předešlém řešení využijeme bod H a dokážeme, že $|HF| = 2|AC|$. Přidáme však další dva body: bod I, který je obrazem bodu A ve středové souměrnosti podle C, a bod J, který je středem úsečky BI. Body C, E, J jsou kolineární, protože úsečka CJ je střední příčkou v trojúhelníku ABI, a tudíž rovnoběžná s úsečkou AB (obr. 6). Dokážeme, že $AHFI$ je rovnoběžník; z toho ihned vyplyne dokazované tvrzení. Jelikož $AI \parallel HF$, stačí dokázat, že $AH \parallel IF$.



Obr. 6

Jelikož $|CA| = |CB| = |CI|$, leží bod B na Thaletově kružnici nad průměrem AI, takže úhel ABI je pravý. Bod E leží na průsečíku os úseček BF a BI, proto je středem kružnice opsané trojúhelníku BFI. Pro úhel FIB nad tětivou BF této kružnice tak máme $|\sphericalangle FIB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle FEB|$ (využíváme, že bod F leží v polorovině opačné k BIA, což platí díky tomu, že osa SE úsečky BF protíná polopřímku opačnou k BA). Platí tedy

$$\begin{aligned} |\sphericalangle FIA| &= |\sphericalangle BIA| + |\sphericalangle FIB| = (90^\circ - |\sphericalangle IAB|) + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle FEB| = \\ &= 90^\circ - |\sphericalangle IAB| + \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2|\sphericalangle BFE|) = 180^\circ - |\sphericalangle IAB| - |\sphericalangle BFH| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle IAB| - |\sphericalangle BAH| = 180^\circ - |\sphericalangle IAH|, \end{aligned}$$

tudíž $AH \parallel IF$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pomocí počítání velikostí úhlů dokažte, že výšky v ostroúhlém trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme postupně D a E paty výšek z vrcholů A a B, dále P průsečík úseček AD a BE a X průsečík CP a AB. Dokážeme, že přímka CP je kolmá na AB. Čtyřúhelníky $ABDE$ a $CDPE$ jsou tětivové, protože jejich vrcholy leží na Thaletových kružnicích s průměry AB a CP. Proto úhly BAD, BED, PCD mají všechny stejnou velikost $90° - |\sphericalangle ABC|$. Úhel CXB, který dopočítáme ze známých velikostí zbývajících úhlů v trojúhelníku CXB, je tedy pravý.]

N2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s patami výšek D, E, F, které leží postupně na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v středové souměrnosti podle středu strany AB leží na přímce DE. Určete velikost úhlu BAC. [Slovenská verze 57–A–II–3, `https://skmo.sk/dokument.php?id=214`]

N3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P. Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Dokažte. [56–A–III–5; Označme M patu výšky z vrcholu C; bod P leží na úsečce CM. Uvažujme úsečku $B'C$, která je obrazem úsečky BC v osové souměrnosti s osou CM. Úhly CBP, $CB'P$ jsou díky symetrii shodné. Body A, B, D, E leží podle zadání na kružnici, proto úhly CAP a CBP jsou shodné. Z bodů A a B' je vidět úsečku CP pod stejným úhlem, navíc jsou ve stejné polorovině vzhledem k přímce CP, a tedy $PCAB'$ je tětivový čtyřúhelník. Proto úhly $B'AP$, $B'CP$, BCP mají všechny shodnou velikost $90° - \beta$. Zbývá dopočítat velikosti úhlů v trojúhelníku ADB a vidíme, že úhel ADB je pravý, proto P je průsečík výšek. Klíčová idea tohoto řešení — využití vhodné osové souměrnosti — je velmi užitečná i v soutěžní úloze.]

N4. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP. [55–A–II–3]

N5. Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a uvnitř úsečky AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C. Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí. [58–A–II–4]

D1. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D2. V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ. [63–A–III–2]

D3. Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem A na kružnici k_1 a vrcholy B, C na kružnici k_2 zvolenými tak, že obě přímky AB, AC jsou tečnami kružnice k_2. Najděte
   a) množinu středů kružnic vepsaných,
   b) množinu průsečíků výšek
   všech takových trojúhelníků ABC. [57–A–III–2]

Výborným materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) jsou kapitoly 2.1 a 2.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce `http://kms.sk/zbierka`.

6. *Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic*

$$
\begin{aligned}
k - x^2 &= y,\\
k - y^2 &= z,\\
k - z^2 &= u,\\
k - u^2 &= x
\end{aligned}
$$

s reálným parametrem k z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení. Odečtením třetí rovnice dané soustavy od první rovnice dostaneme

$$z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = y - u. \tag{1}$$

Podobně z druhé a čtvrté rovnice dané soustavy vyjde

$$y^2 - u^2 = (y - u)(y + u) = x - z. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2) pak plyne $x = z$, právě když $y = u$. Proto dále rozlišíme dva případy značené jako a) a b).

a) Předpokládejme nejprve, že $x = z$ a $y = u$, tj. řešení dané soustavy rovnic budeme hledat ve tvaru uspořádaných čtveřic $(x, y, z, u) = (x, y, x, y)$ s neznámými x a y. V tomto případě můžeme původní soustavu rovnic redukovat na soustavu dvou rovnic o neznámých x, y ve tvaru

$$k - x^2 = y,$$
$$k - y^2 = x.$$

Odečtením jedné rovnice od druhé dojdeme po snadné úpravě k následující rovnici v součinovém tvaru

$$(y - x)(y + x - 1) = 0,$$

takže nastane jedna ze dvou (jak se ukáže ne zcela disjunktivních) možností.

Při první možnosti $y - x = 0$ přechází redukovaná soustava po dosazení $y = x$ v jedinou kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - k = 0.$$

Tato rovnice má pro libovolnou hodnotu parametru $k \in \langle 0, 1\rangle$ (jak je vymezeno v zadání) dva různé reálné kořeny, a to

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k + 1}}{2}.$$

Zadaná úloha má proto nejméně dvě řešení

$$x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = \frac{-1 + \sqrt{4k + 1}}{2}, \quad x_2 = y_2 = z_2 = u_2 = \frac{-1 - \sqrt{4k + 1}}{2}. \tag{3}$$

Při druhé možnosti $x + y - 1 = 0$ se dosazením $y = 1 - x$ dostaneme od redukované soustavy ke kvadratické rovnici

$$x^2 - x + (1 - k) = 0.$$

Protože její diskriminant je roven $4k - 3$, má uvedená rovnice reálné kořeny pouze v případě, kdy $k \geqq 3/4$. Těmito kořeny jsou reálná čísla

$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{4k - 3}}{2} \quad \text{a} \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{4k - 3}}{2}.$$

Odpovídající hodnoty $y = 1 - x$ jsou pak

$$y_3 = \frac{1 - \sqrt{4k-3}}{2} \quad \text{a} \quad y_4 = \frac{1 + \sqrt{4k-3}}{2}.$$

Pro nejmenší hodnotu $k = 3/4$ ovšem platí $x_3 = y_3 = x_4 = y_4 = 1/2$, takže žádné nové řešení nezahrnuté do rozboru první možnosti $x = y$ nedostáváme — přicházíme znovu k prvnímu řešení z (3), které samozřejmě odpovídá parametru $k = 3/4$. Pro ostatní možné hodnoty parametru k dané odvozenou podmínkou $k > 3/4$ a omezením $k \leqq 1$ má zadaná úloha další dvě řešení

$$(x, y, z, u) = (x_3, y_3, x_3, y_3) \quad \text{a} \quad (x, y, z, u) = (x_4, y_4, x_4, y_4). \tag{4}$$

Tato dvě řešení jsou díky nerovnostem $x_3 \neq x_4$, $x_3 \neq y_3$ a $x_4 \neq y_4$ skutečně navzájem různá a odlišná od obou řešení z (3).

b) Nyní předpokládejme, že $x \neq z$ a $y \neq u$. V takovém případě můžeme po dosazení $x - z$ ze vztahu (2) do levé strany rovnice (1) následně vydělit obě její strany nenulovým číslem $y - u$ a získat tak rovnici

$$(x + z)(y + u) = -1. \tag{5}$$

Využijeme ji dále k jedinému zřejmému závěru: *všechna čtyři čísla x, y, z, u nemohou být záporná* (v opačném případě by totiž levá strana (5) byla kladná). Proto je *některé* z čísel x, y, z, u *nezáporné*. Ukážeme-li však, že díky zadanému předpokladu $k \in \langle 0, 1 \rangle$ plynou snadno z rovnic původní soustavy implikace

$$x \geqq 0 \Rightarrow y \geqq 0 \Rightarrow z \geqq 0 \Rightarrow u \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 0, \tag{6}$$

bude odvozený závěr o nezápornosti *některého* z čísel x, y, z, u znamenat nezápornost *všech čtyř*, a tak se dostaneme do sporu s již zmíněným důsledkem rovnice (5). V případě b) tak zadaná úloha nebude mít žádné řešení.

Zbývá dokázat například první z implikací (6), důkazy ostatních tří totiž budou analogické. Nechť tedy $x \geqq 0$. Ze čtvrté rovnice původní soustavy plyne nerovnost $x \leqq k$, takže s ohledem na $k \leqq 1$ máme $0 \leqq x \leqq k \leqq 1$. To však znamená, že $x^2 \leqq k$, neboť $t^2 \leqq t$ pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Z odvozené nerovnosti $x^2 \leqq k$ už podle první rovnice soustavy plyne $y \geqq 0$, jak jsme chtěli dokázat. Rozbor případu b) je tak hotov (s negativním závěrem).

Závěr. V případě $0 \leqq k \leqq 3/4$ má zadaná soustava právě dvě řešení, která jsou dána vzorci (3), a v případě $3/4 < k \leqq 1$ má právě čtyři řešení, jež jsou určena vzorci (3) a (4).

Jiné řešení. Uvažujme funkci $f(x) = k - x^2$, pomocí které je možné danou soustavu rovnic zapsat jako $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = u$, $f(u) = x$. Pokud postupně dosadíme do čtvrté rovnice třetí, druhou a nakonec první, dostaneme $f(f(f(f(x)))) = x$, čili $f^4(x) = x$. (Symbolem f^k budeme označovat *k-tou iteraci* funkce f. V úloze tedy hledáme právě taková reálná čísla x, která jsou *pevnými body* čtvrté iterace dané funkce f.)

Vyřešíme obecnější úkol: za téhož předpokladu $0 \leqq k \leqq 1$ jako v soutěžní úloze najdeme všechna reálná x taková, že $f^{2n}(x) = x$ pro dané přirozené číslo n. Předpokládejme, že číslo x tuto vlastnost má, a pojďme o něm zjistit více. Předtím si však povšimněme, že s číslem x vyhovuje rovnici $f^{2n}(x) = x$ zřejmě i každé číslo $f^i(x)$, kde $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$.

Začneme velmi užitečným pozorováním: funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 0, \infty)$, takže $f(0)$ je její maximální hodnota. Ukážeme, že pro každé hledané x z předchozího odstavce platí:

(i) *je-li $x \geqq 0$, jsou čísla $f(x), f^2(x), \ldots, f^{2n-1}(x)$ nezáporná;*
(ii) *je-li $x < 0$, jsou čísla $f(x), f^2(x), \ldots, f^{2n-1}(x)$ záporná.*

Nechť tedy $x \geqq 0$. Jelikož $x = f^{2n}(x)$, patří x do oboru hodnot funkce f, proto $0 \leqq x \leqq f(0)$. Na intervalu $\langle 0, f(0)\rangle$ je funkce f klesající, proto $f(x) \geqq f(f(0))$. Přitom $f(f(0)) = f(k) = k - k^2 \geqq 0$ (neboť $k \in \langle 0, 1\rangle$), a tudíž i $f(x) \geqq 0$. Opakováním této úvahy dostaneme tvrzení (i).

Tvrzení (ii) dokážeme sporem. Pokud by nebylo pravdivé, spolu s $x < 0$ by pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ platilo $f^i(x) \geqq 0$. Pak by však podle dokázaného tvrzení (i) — s číslem x zaměněným za číslo $f^i(x)$ — pro všechna $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+2n-1\}$ platilo $f^j(x) \geqq 0$, a to je pro $j = 2n$ spor: $0 > x = f^{2n}(x) \geqq 0$.

Nyní už jsme k řešení rovnice $f^{2n}(x) = x$ plně připraveni. Pro přehlednost nejdříve uvedeme výčet případů, na které celý postup rozdělíme:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) \neq x$ a $x < 0$; c) $f(x) \neq x$ a $x \geqq 0$.

a) Kořeny kvadratické rovnice $f(x) = x$ nás (stejně jako v prvním řešení) přivedou k dvěma řešením $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$.

b) Z předpokladu $x < 0$ podle tvrzení (ii) plyne, že všechna čísla $f^i(x)$ jsou záporná. Protože funkce f je na $(-\infty, 0)$ rostoucí a předpoklad $f(x) \neq x$ znamená, že je buď $f(x) < x$ nebo $f(x) > x$, v případě $f(x) < x$ dostaneme postupně $f^2(x) < f(x)$, $f^3(x) < f^2(x)$, atd. až $f^{2n}(x) < f^{2n-1}(x)$, tedy dohromady

$$x > f(x) > f^2(x) > f^3(x) > \ldots > f^{2n}(x),$$

zatímco v případě $f(x) > x$ dostaneme podobně

$$x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \ldots < f^{2n}(x).$$

V obou případech jsme se dostali ke sporu s rovností $f^{2n}(x) = x$, takže v případě b) žádné řešení poslední rovnice neexistuje.

c) Z předpokladu $x > 0$ podle tvrzení (i) plyne, že všechna čísla $f^i(x)$ jsou nezáporná. Protože funkce f je na intervalu $\langle 0, \infty)$ klesající, je předpoklad $f(x) \neq x$ k odvození závěrů podobných těm z případu b) nedostačující, budeme k nim potřebovat porovnání čísel $f^2(x)$ a x, rozlišíme tedy tři možnosti $f^2(x) < x$, $f^2(x) = x$ a $f^2(x) > x$.

Je-li $f^2(x) < x$, dostáváme postupně $f^3(x) > f(x)$, $f^4(x) < f^2(x)$, atd. až dojdeme ke spornému závěru, že

$$x > f^2(x) > f^4(x) > \ldots > f^{2n}(x).$$

Podobně z $f^2(x) > x$ odvodíme sporný závěr

$$x < f^2(x) < f^4(x) < \ldots < f^{2n}(x).$$

Zbývá tak jediná možnost, že totiž $f^2(x) = x$.[1] Mnohočlen $f^2(x) - x = k - (k - x^2)^2 - x$ je sice čtvrtého stupně, pomůže nám však, že známe dva z jeho kořenů: pokud totiž platí $f(x) = x$, platí i $f^2(x) = x$. Protože kořeny mnohočlenu $f(x) - x = k - x^2 - x$, tj. čísla $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$, jsou pro libovolné $k \in \langle 0, 1\rangle$ reálné a navzájem různé (neboť $x_1 \geqq 0 > x_2$), docházíme k závěru, že mnohočlen $f^2(x) - x$ musí být násobkem mnohočlenu $f(x) - x$. Rutinním vydělením získáme potřebný rozklad

$$\underbrace{k - (k - x^2)^2 - x}_{f^2(x)-x} = \underbrace{(k - x^2 - x)}_{f(x)-x}(x^2 - x + 1 - k).$$

Případné nezáporné kořeny rovnice $f^2(x) = x$ (různé od x_1) tak najdeme řešením kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 - k = 0$. Jsou to čísla $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4k-3})$, a to pouze v případě, kdy $3/4 < k \leqq 1$ — viz diskusi v prvním řešení, kterou zde vynecháme. To jsou i jediná řešení rovnice $f^{2n}(x) = x$ v případě c).

Shrneme výsledky našich úvah: Rovnice $f^{2n}(x) = x$ pro funkci $f(x) = k - x^2$ s parametrem $k \in \langle 0, 1\rangle$ a daným přirozeným číslem n má v oboru reálných čísel v případě $0 \leqq k \leqq 3/4$ právě dvě řešení $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$, v případě $3/4 < k \leqq 1$ pak řešení právě čtyři — kromě uvedených $x_{1,2}$ ještě $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4k-3})$. (Množina kořenů je tak nezávislá na stupni $2n$ dané iterace.[2])

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny hodnoty reálného parametru p, pro které má rovnice $p(x^2 + x + 4) = 2x$ právě jedno reálné řešení. [Daná kvadratická rovnice má právě jedno reálné řešení tehdy, je-li diskriminant roven nule neboli když $(p-2)^2 - 16p^2 = 0$. To nastane pro $p \in \{-2/3, 2/5\}$. Pro $p = 0$ dostaneme lineární rovnici též s jedním řešením.]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 2,\\ x - y &= 2a,\\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

o neznámých x a y a reálném parametru a. [58–B–S–1]

N3. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1,\\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1,\\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1. \end{aligned}$$

[60–B–I–1]

N4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - y} &= z - 1,\\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1,\\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1. \end{aligned}$$

[59–A–I–1]

---

[1] Zdůrazněme, že jsme se v tomto okamžiku „zbavili“ přirozeného čísla n. Dokázali jsme totiž, že každé nezáporné řešení rovnice $f^{2n}(x) = x$ musí být řešením rovnice $f^2(x) = x$ (není-li dokonce samo řešením rovnice $f(x) = x$).

[2] Dodejme, že podanou metodu řešení nelze uplatnit na rovnici $f^n(x) = x$, je-li n liché číslo větší než 1, kdy selhává podaný rozbor případu c). Numerické výpočty ukazují, že takové rovnice mají kromě kořenů $x_{1,2}$ další kladné kořeny, které závisejí na hodnotě n.

N5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2}&=z-1,\\ \sqrt{y-z^2}&=x-1,\\ \sqrt{z-x^2}&=y-1.\end{aligned}$$

[59–A–S–1]

N6. Určete všechny trojice (a,b,c) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}a\sqrt{b}-c&=a,\\ b\sqrt{c}-a&=b,\\ c\sqrt{a}-b&=c.\end{aligned}$$

[59–CPS–1, `https://www.skmo.sk/dokument.php?id=358`]

N7. Vyřešte soustavu rovnic $k+x^2=y$, $k+y^2=x$ s reálným parametrem k. [Rovnice od sebe odečtěte, výslednou rovnost upravte na součinový tvar $(x-y)(x+y+1)=$ $=0$ a rozlište, který z činitelů je nulový. Při shrnování výsledků nezapomeňte, že pro některé k mohou být oba činitelé nuloví.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x+y&=1,\\ x-y&=a,\\ -4ax+4y&=z^2+4\end{aligned}$$

o neznámých x, y, z a reálném parametru a. [58–B–II–1]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}a(b^2+c)&=c(c+ab),\\ b(c^2+a)&=a(a+bc),\\ c(a^2+b)&=b(b+ca).\end{aligned}$$

[64–A–III–4]

D3. Určete všechny trojice (x,y,z) kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}2x^3&=2y(x^2+1)-1(z^2+1),\\ 2y^4&=3z(y^2+1)-2(x^2+1),\\ 2z^5&=4x(z^2+1)-3(y^2+1).\end{aligned}$$

[57–CPS–1, `https://www.skmo.sk/dokument.php?id=79`]