Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí nerovnost*

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

ŘEŠENÍ. Zadaná nerovnost patří do velké skupiny nerovností, které lze dokazovat (často opakovaným) využitím poznatku, že druhá mocnina jakéhokoli reálného čísla je nezáporná. Na jeho základě ověříme předně, že jmenovatel $a^2 - a + 1$ zlomku, který je v dané nerovnosti zastoupen, je vždy kladný. Po úpravě dvojčlenu $a^2 - a$, které říkáme *doplnění na čtverec*, totiž dostaneme

$$a^2 - a + 1 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4} > 0.$$

Jmenovatel $a^2 - a + 1$ je tedy kladný, a když jím proto obě strany dokazované nerovnosti vynásobíme, obdržíme ekvivalentní nerovnost

$$a^2(a^2 - a + 1) + 1 \geqq (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Po roznásobení a sloučení stejných mocnin a dojdeme k nerovnosti

$$a^4 - 2a^3 + a^2 \geqq 0,$$

která ovšem platí, neboť její levá strana má rozklad $a^2(a-1)^2$ s nezápornými činiteli a^2 a $(a-1)^2$ — opět účinkuje poznatek zmíněný v úvodu řešení. Tím je původní nerovnost pro každé reálné číslo a dokázána.

Zároveň jsme zjistili, že rovnost ve výsledné, a tudíž i v původní nerovnosti nastane, právě když platí $a^2(a-1)^2 = 0$, tedy jedině když $a = 0$ nebo $a = 1$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Danou nerovnost můžeme přepsat do tvaru

$$(a^2 - a + 1) + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq 2 \quad \text{neboli} \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2,$$

kde $u = a^2 - a + 1$. Je dobře známo, že poslední nerovnost platí pro každé *kladné* reálné číslo u a že přechází v rovnost jedině pro $u = 1$. Plyne to (opět v důsledku nezápornosti každé druhé mocniny) buď přímo z vyjádření

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2,$$

nebo volbou $x = u$ a $y = 1/u$ v obecnější proslulé nerovnosti $\frac{1}{2}(x+y) \geqq \sqrt{xy}$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem libovolných dvou *nezáporných* čísel x a y, která sama je důsledkem obdobného vyjádření rozdílu obou dotyčných průměrů

$$\tfrac{1}{2}(x+y) - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x} - \sqrt{y}\bigr)^2 \geqq 0.$$

Tak či onak stačí k důkazu původní nerovnosti ověřit, že výraz $u = a^2 - a + 1$ je kladný pro každé reálné číslo a. To lze udělat stejně jako v prvním řešení, nebo přepsat nerovnost $a^2 - a + 1 > 0$ do tvaru

$$a(a-1) > -1$$

a provést krátkou diskusi: Poslední nerovnost platí jak pro každé $a \geqq 1$, tak pro každé $a \leqq 0$, neboť v obou případech máme dokonce $a(a-1) \geqq 0$; pro zbylé hodnoty a, tedy pro $a \in (0,1)$, je součin $a(a-1)$ sice záporný, avšak jistě větší než -1, neboť oba činitelé a, $a-1$ mají absolutní hodnotu menší než 1. Přepsaná nerovnost je tak dokázána pro každé reálné číslo a, a tím je podmínka k užití nerovnosti $u + 1/u \geqq 2$ pro $u = a^2 + a + 1$ ověřena.

Jak jsme již uvedli, rovnost $u + 1/u = 2$ nastane jedině pro $u = 1$. Pro rovnost v nerovnosti ze zadání úlohy tak dostáváme podmínku $a^2 - a + 1 = 1$ neboli $a(a-1) = 0$, což je splněno pouze pro $a = 0$ a pro $a = 1$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y a z platí nerovnosti
a) $2xyz \leqq x^2 + y^2z^2$, b) $(x^2 - y^2)^2 \geqq 4xy(x-y)^2$.
[a) $P - L = (x - yz)^2$, b) $L - P = (x-y)^4$]

N2. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost $a/b^2 + b/a^2 \geqq 1/a + 1/b$. [Vynásobte a^2b^2, vydělte $a + b$ a upravte na $(a-b)^2 \geqq 0$.]

D1. Užitím nerovnosti $u + 1/u \geqq 2$ $(\forall u > 0)$ dokažte, že pro libovolné kladné číslo a platí
a) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$, b) $\dfrac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}} > 1$.
[Volte $u = \sqrt{a^2+2}$ v případě a), $u = \sqrt{4a^2+1}$ v případě b) a v obou případech využijte, že $u \neq 1$.]

D2. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\Bigl(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\Bigr) \geqq 4.$$

[$L = (b/c + c/b) + (a/d + d/a) \geqq 2 + 2 = 4$]

D3. Pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnost

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [59–C–II–2]

D4. Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$ nabývá své nejmenší hodnoty. [65–C–I–3, část a)]

2. *Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu*

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

dělitelná číslem d.

Řešení. Vypočtěme nejprve hodnoty $V(n)$ pro několik nejmenších přirozených čísel n a jejich rozklady na prvočinitele zapišme do tabulky:

n	1	2	3	4
$V(n)$	0	$48 = 2^4 \cdot 3$	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Odtud vidíme, že hledaný dělitel d všech čísel $V(n)$ musí být dělitelem čísla $2^2 \cdot 3 = 12$, splňuje tedy nerovnost $d \leqq 12$.[1] Ukážeme-li proto, že číslo $d = 12$ zadání vyhovuje, že tedy $V(n)$ je násobkem čísla 12 pro *každé* přirozené n, budeme s řešením hotovi.

Úprava

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (12n^2 - 12) + (n^4 - n^2),$$

při které jsme z výrazu $V(n)$ „vyčlenili“ dvojčlen $12n^2 - 12$, který je zřejmým násobkem čísla 12, redukuje náš úkol na prověrku dělitelnosti číslem 12 (tedy dělitelnosti čísly 3 a 4) dvojčlenu $n^4 - n^2$. Využijeme k tomu jeho rozklad

$$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n-1)n^2(n+1).$$

Pro každé celé n je tak výraz $n^4 - n^2$ jistě dělitelný třemi (takové je totiž jedno ze tří po sobě jdoucích celých čísel $n-1$, n, $n+1$) a současně i dělitelný čtyřmi (zaručuje to v případě sudého n činitel n^2, v případě lichého n dva sudí činitelé $n-1$ a $n+1$).

Dodejme, že dělitelnost výrazu $V(n)$ číslem 12 lze dokázat i jinými způsoby, například můžeme využít rozklad

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2 + 12)(n^2 - 1)$$

nebo přejít k dvojčlenu $n^4 + 11n^2$ a podobně.

Odpověď. Hledané číslo d je rovno 12.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v nekonečné řadě čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 4 \cdot 5,\ 4 \cdot 5 \cdot 6,\ \dots,$$

je číslo první dělitelem všech čísel dalších. [Využijte toho, že ze dvou, resp. tří po sobě jdoucích čísel je vždy některé číslo dělitelné dvěma, resp. třemi.]

N2. Najděte všechna celá $d > 1$, při nichž hodnoty výrazů $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$ a $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$ dávají při dělení číslem d stejné zbytky, ať je celé číslo n zvoleno jakkoli. [Vyhovuje jedině $d = 13$. Hledaná d jsou právě ta, která dělí rozdíl $U(n) - V(n) = 13n^2 - 13 = 13(n-1)(n+1)$ pro každé celé n. Abychom ukázali, že (zřejmě vyhovující) $d = 13$ je jediné, dosaďme do rozdílu $U(n) - V(n)$ hodnotu $n = d$: číslo d je s čísly $d-1$ a $d+1$ nesoudělné, takže dělí součin $13(d-1)(d+1)$, jedině když dělí činitel 13, tedy když $d = 13$.]

D1. Pro která přirozená čísla n není výraz $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkem osmi? [Výraz $V(n) = (n-1)(n+1)(n^2+12)$ je jistě násobkem osmi v případě lichého n, neboť $n-1$ a $n+1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla, takže jedno z nich je dělitelné čtyřmi, a součin obou je tak násobkem osmi. Protože pro sudá n je součin $(n-1)(n+1)$ lichý, hledáme právě ta n tvaru $n = 2k$, pro něž není dělitelný osmi výraz $n^2 + 12 = 4(k^2 + 3)$, což nastane, právě když k je sudé. Hledaná n jsou tedy právě ta, jež jsou dělitelná čtyřmi.]

D2. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti. [59–C–II–1]

D3. Dokažte, že výrazy $23x + y$ a $19x + 3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x a y. [60–C–I–2]

D4. Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. [62–C–I–5]

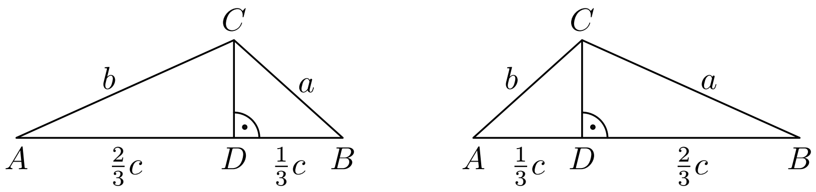
D5. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96. [63–C–I–5]

[1] Tento závěr dostaneme rychle i bez uvedené tabulky jen z podmínky, že číslo d musí m.j. dělit i hodnotu $V(d) = d^4 + 11d^2 - 12$.

3. *Pata výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC dělí stranu AB v poměru $1:2$. Dokažte, že při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC platí nerovnost*

$$3|a-b| < c.$$

Řešení. Pata D zmíněné výšky je podle zadání tím vnitřním bodem strany AB, pro který platí $|AD| = 2|BD|$ nebo $|BD| = 2|AD|$. Obě možnosti jsou znázorněny na následujícím obr. 1 s popisem délek stran AC, BC a obou úseků rozdělené strany AB.



Obr. 1

Pythagorova věta pro pravoúhlé trojúhelníky ACD a BCD vede k dvojímu vyjádření kvadrátu společné odvěsny CD, přičemž v situaci nalevo dostaneme

$$|CD|^2 = b^2 - (\tfrac{2}{3}c)^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}c)^2,$$

odkud po snadné úpravě poslední rovnosti obdržíme vztah

$$3(b^2 - a^2) = c^2.$$

Pro druhou situaci vychází analogicky

$$3(a^2 - b^2) = c^2.$$

Závěry pro obě možnosti lze zapsat jednotně jako rovnost s absolutní hodnotou

$$3|a^2 - b^2| = c^2.$$

Užijeme-li rozklad $|a^2 - b^2| = |a-b|(a+b)$ a nerovnost $c < a+b$ (kterou jak známo splňují délky stran každého trojúhelníku ABC), obdržíme z odvozené rovnosti

$$3|a-b|c < 3|a-b|(a+b) = c^2,$$

odkud po vydělení kladnou hodnotou c dostaneme $3|a-b| < c$, jak jsme měli dokázat.

Zdůrazněme, že nerovnost $3|a-b|c < 3|a-b|(a+b)$ jsme správně zapsali jako ostrou — v případě $a = b$ by sice přešla v rovnost, avšak podle našeho odvození by pak platilo $c^2 = 0$, což odporuje tomu, že jde o délku strany trojúhelníku.

Jiné řešení. Nerovnost, kterou máme dokázat, lze po vydělení třemi zapsat bez absolutní hodnoty jako dvojici nerovností

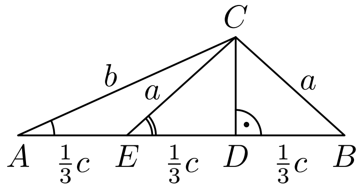
$$-\tfrac{1}{3}c < a-b < \tfrac{1}{3}c.$$

Opět jako v původním řešení rozlišíme dvě možnosti pro polohu paty D uvažované výšky a ukážeme, že vypsanou dvojici nerovností lze upřesnit do podoby

$$-\tfrac{1}{3}c < a-b < 0, \quad \text{respektive} \quad 0 < a-b < \tfrac{1}{3}c,$$

podle toho, zda nastává situace z levé či pravé části obrázku 1, kterým jsme původní řešení doprovodili.

Pro situaci z obr. 1 nalevo přepíšeme avizované nerovnosti $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ jako $a < b < a + \frac{1}{3}c$ a odvodíme je z pomocného trojúhelníku ACE, kde E je střed úsečky AD, takže body D a E dělí stranu AB na tři shodné úseky délky $\frac{1}{3}c$ (obr. 2).



Obr. 2

V obrázku jsme rovnou vyznačili, že úsečka EC má délku a jako úsečka BC, a to v důsledku shodnosti trojúhelníků BCD a ECD podle věty *sus*. Proto je pravá z nerovností $a < b < a + \frac{1}{3}c$ porovnáním délek stran trojúhelníku ACE, které má obecnou platnost.

Levou nerovnost $a < b$ odvodíme z druhého obecného poznatku, že totiž v každém trojúhelníku *oproti většímu vnitřnímu úhlu leží delší strana*. Stačí nám tedy zdůvodnit, proč pro úhly vyznačené na obr. 2 platí $|\sphericalangle CAE| < |AEC|$. To je však snadné: zatímco úhel CAE je díky pravoúhlému trojúhelníku ACD ostrý, úhel AEC je naopak tupý, neboť k němu vedlejší úhel CED je ostrý díky pravoúhlému trojúhelníku CED.

Pro případ situace z obr. 1 napravo lze předchozí postup zopakovat s novým bodem E, tentokrát středem úsečky BD. Můžeme však díky souměrnosti podle osy AB konstatovat, že z dokázaných nerovností $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ pro situaci nalevo plynou nerovnosti $-\frac{1}{3}c < b - a < 0$ pro situaci napravo, z nichž po vynásobení číslem -1 dostaneme právě nerovnosti $0 < a - b < \frac{1}{3}c$, jež jsme měli v druhé situaci dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Připomeňte si, které nerovnosti splňují mezi sebou délky stran libovolného trojúhelníku (a kterým proto říkáme *trojúhelníkové*). Z nich pak odvoďte známé pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow a < b$ o porovnání velikostí vnitřních úhlů a délek protilehlých stran v libovolném trojúhelníku ABC. [Je-li $\alpha < \beta$, můžeme najít vnitřní bod X strany AC, pro který platí $|\sphericalangle ABX| = \alpha$, a tudíž $|AX| = |BX|$, takže z trojúhelníkové nerovnosti $|BC| <$ $< |BX| + |XC|$ už plyne $a < b$.]

N2. Je-li D vnitřní bod úsečky AB, pak pro každý bod X kolmice vedené bodem D k přímce AB má výraz $|AX|^2 - |BX|^2$ tutéž hodnotu (rovnou hodnotě $|AD|^2 - |BD|^2$). Dokažte. [Užijte Pythagorovu větu pro trojúhelníky ADX a BDX.]

D1. Odvoďte nerovnost, která je zobecněním nerovnosti ze zadání soutěžní úlohy pro případ, kdy pata výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC rozděluje jeho stranu AB v poměru $1 : p$, kde p je dané kladné číslo různé od 1. [$(p + 1)|a - b| < |p - 1|c$.]

D2. Pro každý bod M uvnitř daného rovnostranného trojúhelníku ABC označme M_a, M_b, M_c jeho kolmé průměty po řadě na strany BC, AC, AB. Dokažte rovnost $|AM_b| +$ $+ |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b|$. [Nejprve třikrát užijte výsledek úlohy N2 s bodem $X = M$ a odtud plynoucí vyjádření rozdílů $|AM|^2 - |BM|^2$, $|BM|^2 - |CM|^2$, $|CM|^2 - |AM|^2$ jednotlivě upravte a pak sečtěte.]

4. *Nalezněte všechny trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty a, b a c, pro které platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň $\big(P(1)\big)^2 + \big(P(2)\big)^2 + \big(P(3)\big)^2 = 22$.*

ŘEŠENÍ. Protože a, b, c jsou dle zadání celá čísla, jsou takové i hodnoty $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$. Jejich druhé mocniny, tedy čísla $P(1)^2$, $P(2)^2$ a $P(3)^2$, jsou proto druhými mocninami celých čísel, tedy tři (ne nutně různá) čísla z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Jejich součet je podle zadání roven 22, takže každý ze tří sčítanců je menší než šesté možné číslo 25. Jakými způsoby lze vůbec sestavit součet 22 ze tří čísel vybraných z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16\}$?

Systematickým rozborem rychle zjistíme, že rozklad čísla 22 na součet tří druhých mocnin je (až na pořadí sčítanců) pouze jeden, totiž $22 = 4+9+9$. Dvě z čísel $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$ mají tudíž absolutní hodnotu 3 a třetí 2, a protože $P(1) < P(2) < P(3)$, musí nutně platit $P(1) = -3$, $P(3) = 3$ a $P(2) \in \{-2, 2\}$. Pro každou z obou vyhovujících trojic

$$\big(P(1), P(2), P(3)\big) = (-3, -2, 3) \quad \text{a} \quad \big(P(1), P(2), P(3)\big) = (-3, 2, 3)$$

určíme koeficienty a, b, c příslušného trojčlenu $P(x)$ tak, že nalezené hodnoty dosadíme do pravých stran rovnic

$$\begin{aligned} a + b + c &= P(1), \\ 4a + 2b + c &= P(2), \\ 9a + 3b + c &= P(3) \end{aligned}$$

a výslednou soustavu tří rovnic s neznámými a, b, c vyřešíme. Tento snadný výpočet zde vynecháme, v obou případech vyjdou celočíselné trojice (a, b, c), které zapíšeme rovnou jako koeficienty trojčlenů, jež jsou jedinými dvěma řešeními dané úlohy:

$$P_1(x) = 2x^2 - 5x \quad \text{a} \quad P_2(x) = -2x^2 + 11x - 12.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojčleny $P(x) = ax + b$, pro které platí $P(2) = 3$ a $P(3) = 2$. [Jediný dvojčlen $P(x) = 5 - x$, neboť soustava rovnic $2a + b = P(2) = 3$, $3a + b = P(3) = 2$ má jediné řešení $a = -1$ a $b = 5$.]

N2. Určete všechny trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pro které platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$. [Jediný trojčlen $P(x) = 2x^2 - x + 3$, neboť soustava rovnic $a + b + c = 4$, $4a + 2b + c = 9$, $9a + 3b + c = 18$ má jediné řešení $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.]

N3. Určete všechny dvojčleny $P(x) = ax + b$ s celočíselnými koeficienty a a b, pro které platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$. [Vyhovují právě čtyři dvojčleny $x + 0$, $3x - 4$, $x - 3$ a $3x - 5$. Číslo 5 lze zapsat jediným způsobem jako součet dvou druhých mocnin celých čísel, nehledíme-li na pořadí sčítanců, totiž $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$. Proto čísla $P(1) < P(2)$ tvoří jednu z dvojic $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 1)$; pro každou z nich vypočtěte koeficienty a, b postupem k úloze N1.]

D1. Pro které trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ platí rovnost $P(4) = P(1) - 3P(2) + 3P(3)$? [Pro všechny. Přesvědčete se dosazením, že obě strany dotyčné rovnosti jsou rovny $16a + 4b + c$.]

D2. Koeficienty a, b, c trojčlenu $P(x) = ax^2 + bx + c$ jsou reálná čísla, přitom každá ze tří jeho hodnot $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$ je celým číslem. Plyne odtud, že také čísla a, b, c jsou celá, nebo je nutně celé aspoň některé z nich (které)? [Neplyne, uvažte příklad trojčlenu $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$: z vyjádření $P(x) = \frac{1}{2}x(x+1) + 1$ plyne, že $P(x)$ je celým číslem pro každé celé x, neboť součin $x(x + 1)$ je tehdy dělitelný dvěma. V obecné situaci je pouze koeficient c nutně celé číslo; plyne to z vyjádření $c = P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3)$.]

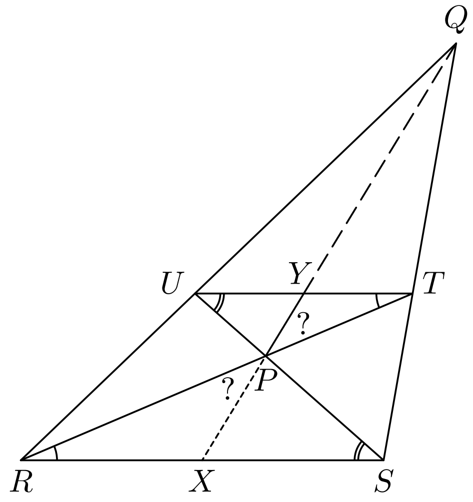
5. *V daném trojúhelníku ABC zvolme uvnitř strany AC body K, M a uvnitř strany BC body L, N tak, že*

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Dále označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABLK$, F průsečík úhlopříček lichoběžníku $KLNM$ a G průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABNM$. Dokažte, že body E, F a G leží na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC, a určete poměr $|GF| : |EF|$.

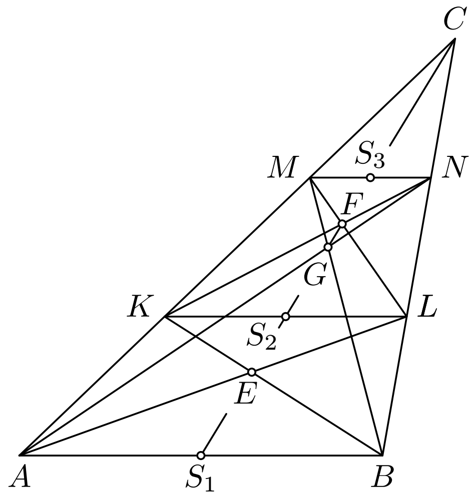
Řešení. Před vlastním řešením odvodíme důležité vlastnosti obecného lichoběžníku $RSTU$: *Označíme-li X a Y po řadě středy základen RS a TU, pak na úsečce XY leží průsečík P úhlopříček RT a SU, a to tak, že $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$. Na přímce XY leží rovněž průsečík Q prodloužených ramen RU a ST, a to tak, že $|QX| : |QY| = |RS| : |TU|$* (obr. 3).

Přestože se podle obrázku zdá, že bod P na úsečce XY skutečně leží, musíme tento poznatek *dokázat*, tedy odvodit argumentací nezávislou na přesnosti našeho rýsování. K tomu jistě stačí prokázat, že obě úsečky PX, PY svírají s přímkou RT shodné úhly (na obrázku vyznačené otazníky). Všimneme si, že tyto úsečky jsou těžnicemi trojúhelníků RSP a TUP, které se shodují ve vnitřních úhlech (vyznačených obloučky) při rovnoběžných stranách RS a TU, takže jde o trojúhelníky podobné, a to s koeficientem $k = |TU|/|RS|$. Jak víme (úloha N2), se stejným koeficientem platí i podobnost „půlek“ těchto trojúhelníků vyťatých jejich těžnicemi, přesněji podobnost $RXP \sim TYP$. Z ní už kýžená shodnost úhlů RPX a TPY i kýžená rovnost $|PY| = k|PX|$ (díky stejnému koeficientu) plyne. Vše o bodu P je tak dokázáno; podobně se ověří i obě vlastnosti bodu Q — ukáže se, že úsečky QX a QY svírají týž úhel s přímkou RQ a jejich délky jsou svázány rovností $|QY| = k|QX|$, a to díky tomu, že QX a QY jsou těžnice ve dvou navzájem podobných trojúhelnících RSQ a UTQ.



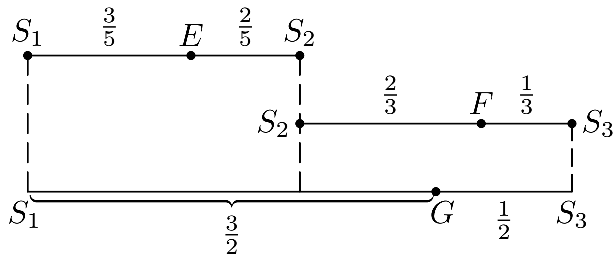
Obr. 3

Dokázané vlastnosti obecného lichoběžníku nám umožní celkem snadno vyřešit zadanou úlohu. Situace je znázorněna na obr. 4. Kromě pojmenovaných bodů jsme tam ještě označili S_1, S_2, S_3 středy úseček AB, KL a MN. Protože trojúhelníky ABC,



Obr. 4

KLC a MNC jsou navzájem podobné (podle věty *sus*), platí $|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1$. Podle shodných vnitřních úhlů zmíněných tří trojúhelníků platí rovněž $AB \parallel KL \parallel MN$. Čtyřúhelníky $ABLK$, $KLNM$ a $ABNM$ tak jsou skutečně lichoběžníky (jak je prozrazeno v zadání) se základnami AB, KL a MN, jejichž délky jsou v již odvozeném poměru $3 : 2 : 1$. Navíc prodloužená ramena všech tří lichoběžníků se protínají v bodě C, kterým proto podle dokázané vlastnosti procházejí přímky S_1S_2, S_2S_3 (a S_1S_3), takže se jedná o jednu přímku, na níž body S_1, S_2, S_3 a C leží v uvedeném pořadí tak, že $|S_1C| : |S_2C| : |S_3C| = 3 : 2 : 1$. Odtud plyne $|S_1S_2| = |S_2S_3|$ $(= |S_3C|)$, takže bod S_2 je středem úsečky S_1S_3. Na ní (opět podle dokázaného tvrzení) leží i body body E, F a G, přičemž pro bod E mezi body S_1, S_2 platí $|ES_1| : |ES_2| = 3 : 2$, pro bod F mezi body S_2, S_3 platí $|FS_2| : |FS_3| = 2 : 1$ a konečně pro bod G mezi body S_1, S_3 platí $|GS_1| : |GS_3| = 3 : 1$. Tato dělení tří úseček jsme znázornili na obr. 5, kam jsme zapsali i délky vzniklých úseků při volbě jednotky $1 = |S_1S_2| = |S_2S_3|$ (při níž $|S_1S_3| = 2$).



Obr. 5

Protože

$$|S_1F| = |S_1S_2| + |S_2F| = 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} > \tfrac{3}{2} = |S_1G|,$$

platí $|GF| = |S_1F| - |S_1G| = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, což spolu s rovností $|EF| = |ES_2| + |S_2F| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$ již vede k určení hledaného poměru

$$|GF| : |EF| = \tfrac{1}{6} : \tfrac{16}{15} = 5 : 32.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zopakujte si, co víte o podobnosti dvou trojúhelníků z učiva základní školy: Podobnost $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ s koeficientem k znamená, že pro obvykle značené délky stran a velikosti vnitřních úhlů obou trojúhelníků platí rovnosti $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$. Stačí k tomu, aby platilo (i) $a_2 : b_2 : c_2 = a_1 : b_1 : c_1$ (věta *sss*) nebo (ii) $\alpha_2 = \alpha_1$ a $\beta_2 = \beta_1$ (věta *uu*) nebo (iii) $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$ a $\gamma_2 = \gamma_1$ (věta *sus*).

N2. Nechť $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou libovolné dva podobné trojúhelníky ($A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$). Označme S_1, S_2 po řadě středy stran A_1B_1, A_2B_2. Dokažte podobnost $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ a ukažte, že má stejný koeficient jako původní podobnost $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. [Podobnost $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ platí díky větě *sus*, neboť vnitřní úhly obou trojúhelníků u vrcholů A_1, A_2 jsou shodné a pro délky stran, které je svírají, platí $|A_2S_2| : |A_1S_1| = (\frac{1}{2}|A_2B_2|) : (\frac{1}{2}|A_1B_1|) = |A_2B_2| : |A_1B_1| = |A_2C_2| : |A_1C_1|$. Předpokládaná i dokázaná podobnost mají stejný koeficient $k = |A_2B_2|/|A_1B_1|$.]

N3. Dokažte, že libovolná spojnice ramen daného lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami $AB \parallel CD$, je úsečka, jejíž střed leží na spojnici středů obou základen. Pak ukažte, že průsečík úhlopříček P je středem té ze zmíněných spojnic ramen, která tímto průsečíkem prochází. [Užijte nejprve výsledek úlohy N2 pro podobné trojúhelníky se společným vrcholem, kterým je průsečík prodloužených ramen, a protilehlými stranami, kterými jsou jednak základna lichoběžníku, jednak uvažovaná spojnice ramen. K důkazu vlastnosti průsečíku P označte $E \in BC$, $F \in AD$ krajní body příslušné spojnice ramen a využijte toho, že podobnost trojúhelníků APF, ACD ma stejný koeficient jako podobnost trojúhelníků BEP, BCD.]

D1. Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí $p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|$.

a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.

b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4. [65–C–I–4]

D2. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [64–C–I–4]

6. *a) Maruška rozmístí do vrcholů pravidelného osmiúhelníku různé počty od jednoho do osmi bonbonů. Petr si pak může vybrat, které tři hromádky bonbonů dá Marušce, ostatní si ponechá. Jedinou podmínkou je, že tyto tři hromádky leží ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku. Maruška chce rozmístit bonbony tak, aby jich dostala co nejvíce, ať už Petr trojici vrcholů vybere jakkoli. Kolik jich tak Maruška zaručeně získá?*

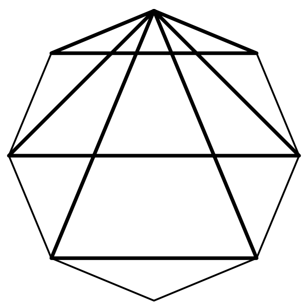
b) Stejnou úlohu řešte i pro pravidelný devítiúhelník, do jehož vrcholů rozmístí Maruška 1 až 9 bonbonů.

(Mezi rovnoramenné trojúhelníky řadíme i trojúhelníky rovnostranné.)

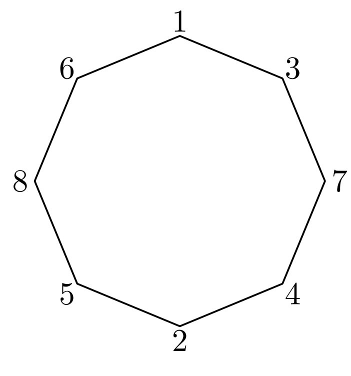
Řešení. Maruška musí počítat s tím, že Petr vybere takovou trojici vrcholů rovnoramenného trojúhelníku, v nichž je dohromady co nejméně bonbónů. Proto je v zájmu Marušky rozmístit bonbony tak, aby byl zmíněný minimální počet co největší.

a) Ukážeme nejprve, že ať Maruška rozmístí bonbony do vrcholů pravidelného osmiúhelníku v počtech 1 až 8 jakkoli, Petr vždy najde rovnoramenný trojúhelník, v jehož vrcholech je dohromady *nejvýše deset* bonbonů.

Předně si rozmysleme (použijte třeba obr. 6, kde jsou vyznačeny všechny tři typy rovnoramenných trojúhelníků), že každé dva různé vrcholy pravidelného osmiúhelníku jsou vrcholy buď dvou, nebo čtyř uvažovaných rovnoramenných trojúhelníků. Rozlišíme přitom, kterou ze vzdáleností[2] 1, 2, 3, 4 dané dva vrcholy mají, podle toho je počet oněch trojúhelníků po řadě 2, 4, 2, 2 (ověřte sami). Vybere-li proto Petr nejprve ty dva vrcholy, do nichž Maruška rozmístí 1 a 2 bonbony, má pak k výběru třetího vrcholu alespoň dvě možnosti, takže se může vyhnout případnému výběru, kdy by Maruška získala $1 + 2 + 8$ bonbonů, a zvolit vždy výběr, kdy Maruška dostane nejvýše $1 + 2 + 7 = 10$ bonbonů. Popsali jsme tedy Petrovu strategii, při níž Maruška nezíská více než 10 bonbonů.



Obr. 6



Obr. 7

V druhé části řešení úlohy a) poradíme Marušce jedno konkrétní rozmístění, při kterém 10 bonbonů zaručeně získá, ať Petr provede výběr rovnoramenného trojúhelníku jakkoli. Půjde o rozmístění, kdy do jednotlivých vrcholů po řadě v jednom směru po hranici útvaru rozmístíme 1, 3, 7, 4, 2, 5, 8 a 6 bonbonů (obr. 7).

[2] Míníme jí počet stran mnohoúhelníku na kratší z obou cest po jeho hranici, které dané dva vrcholy spojují.

Nyní je třeba ověřit, že součet čísel u vrcholů každého rovnoramenného trojúhelníku na obr. 7 je roven aspoň 10. Při kontrole stačí pouze testovat součty, které jsou podle dvou nejmenších sčítanců tvaru $1 + 2 + x$, $1 + 3 + x$ nebo $2 + 3 + x$ (ostatní součty jsou jistě alespoň 10). Z obr. 7 vidíme, že jde právě o součty

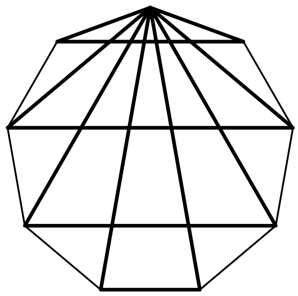
$$1 + 2 + 8,\ 1 + 2 + 7,\ 1 + 3 + 7,\ 1 + 3 + 6,\ 2 + 3 + 8,\ 2 + 3 + 6,$$

z nichž žádný není menší než 10. Maruška tak má strategii, která ji přináší zisk alespoň 10 bonbonů (uvedený příklad rozmístění je jen jeden z mnoha možných). Z první části řešení ovšem plyne, že Maruška zisk více než 10 bonbonů zaručen nemá.

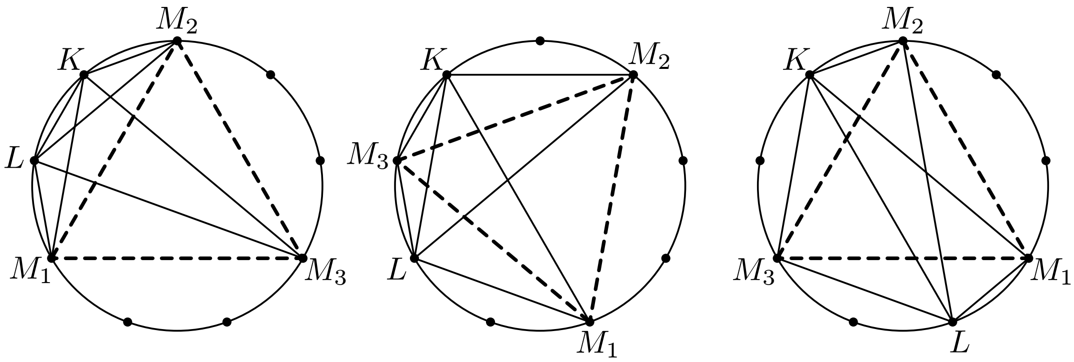
b) Při řešení druhé úlohy už nebudeme opakovat komentáře o strategiích Petra a Marušky a bonbony u vrcholů zaměníme jejich počty, tj. čísly.

V první části budeme předpokládat, že k vrcholům pravidelného devítiúhelníku jsou připsána čísla od 1 do 9 jakkoli, a ukážeme, že pro součet s tří čísel u vrcholů vhodného rovnoramenného trojúhelníku platí $s \leqq 10$.

U pravidelného devítiúhelníku je počet rovnoramenných trojúhelníků s danými dvěma vrcholy buď roven 1 (jde o rovnostranný trojúhelník), nebo je roven 3 — podle jejich vzdálenosti 1, 2, 3, 4 po sousedních vrcholech je tento počet totiž po řadě 3, 3, 1, 3 (sami ověřte, na obr. 8 jsou vyznačeny všechny čtyři typy rovnoramenných trojúhelníků). Navíc budeme potřebovat ještě poznatek, že u oněch tří rovnoramenných trojúhelníků s dvěma pevnými vrcholy tvoří jejich třetí vrcholy vždy rovnostranný trojúhelník. Plyne to z obr. 9 pro tři situace, kdy vzdálenost dvou pevných vrcholů K a L je 1, resp. 2, resp. 4 (všechny rovnoramenné trojúhelníky KLM_i jsou vykresleny).



Obr. 8



Obr. 9

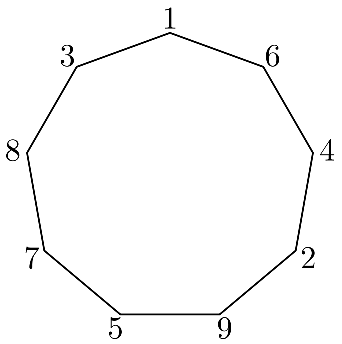
Nyní už můžeme dokázat nerovnost $s \leqq 10$ při libovolném očíslovaní vrcholů, jak jsme slíbili v úvodní větě řešení části b).

Je-li trojúhelník s čísly 1, 2, 3 rovnostranný, vybereme ho a dostaneme dokonce $s = 1 + 2 + 3 = 6$; v opačném případě jsou (podle předchozích úvah) čísla 1 a 2 nebo čísla 1 a 3 u vrcholů tří rovnoramenných trojúhelníků. Znamená to, že pak mezi zkoumanými součty jsou tři součty tvaru $1 + 2 + x$ nebo tři součty tvaru $1 + 3 + x$. Můžeme se tedy vyhnout dvěma případným součtům pro $x = 9$ a $x = 8$ a vybrat jen ten ze součtů, v němž bude $x \leqq 7$. S výjimkou jediného případu $s = 1 + 3 + 7 = 11$ dostaneme vždy $s \leqq 10$.

Kdyby však náš postup přece jen skončil hodnotou $s = 11$, znamenalo by to, že čísla 1 a 2 stojí u vrcholů rovnostranného trojúhelníku (jinak bychom vybrali součet $1 + 2 + x$ s $x \leqq 7$!) a navíc existují tři rovnoramenné trojúhelníky se součty $1 + 3 + 7$, $1 + 3 + 8$ a $1 + 3 + 9$. Tyto tři trojúhelníky se dvěma společnými vrcholy (s čísly 1 a 3) však podle odstavce ukončeného obr. 9 zaručují, že trojúhelník se součtem $7 + 8 + 9$ je rovnostranný, takže třetí vrchol rovnostranného trojúhelníku, u jehož vrcholů stojí čísla 1 a 2, nemůže být žádné z čísel 7, 8, 9. Našli jsme tedy rovnostranný trojúhelník se součtem $s \leqq 1 + 2 + 6 = 9$.

Dokázali jsme tak, že v případě, kdy trojúhelník se součtem $1 + 2 + 3$ není rovnostranný, existuje vždy rovnoramenný trojúhelník se součtem nejvýše 10. První část řešení je tak hotova.

V druhé části řešení úlohy b) podáme příklad (opět jednoho z mnohých) očíslování vrcholů pravidelného devítiúhelníku, kdy součet tří čísel u vrcholů každého rovnoramenného trojúhelníku je alespoň 10. Vrcholy v jednom směru po hranici označíme po řadě čísly 1, 6, 4, 2, 9, 5, 7, 8 a 3 (obr. 10).



Obr. 10

I tentokrát stačí otestovat součty tvaru $1+2+x$, $1+3+x$, $2+3+x$, což jsou podle obr. 10 právě součty

$$1 + 2 + 7,\ 1 + 3 + 6,\ 1 + 3 + 8,\ 1 + 3 + 9,\ 2 + 3 + 6,\ 2 + 3 + 8,\ 2 + 3 + 9,$$

mezi nimiž skutečně není žádný menší než 10.

Odpověď. Pro obě úlohy a) a b) platí, že největší počet bonbonů, které Maruška může zaručeně získat, je roven 10.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. K vrcholům pravidelného sedmiúhelníku připíšeme čísla od 1 do 7 v jakémkoli pořadí. Dokažte, že součet tří čísel u vrcholů některého rovnoramenného trojúhelníku je menší než 9. [Uvažte dva vrcholy X a Y s čísly 1 a 2 a rozborem všech možností ověřte, že existují vždy tři rovnoramenné trojúhelníky XYZ s vhodnou volbou třetího vrcholu Z. Vybereme z nich to Z, u kterého není ani číslo 7, ani číslo 6. Součet čísel u vrcholů příslušného trojúhelníku XYZ je pak nejvýše $1 + 2 + 5 = 8$.]

N2. Zůstane obecně platné tvrzení z úlohy N1, když v něm závěrečné číslo 9 zaměníme číslem 8? [Ne. Připište vrcholům v jednom směru po hranici po řadě čísla 1, 3, 4, 2, 5, 6 a 7. Pak součet tří čísel u vrcholů každého rovnoramenného trojúhelníku bude alespoň 8. Uvědomte si, že při prověrce posledního poznatku (i pro jiná rozmístění čísel nežli námi uvedené) stačí ověřit, že jsou *různostranné* ty dva trojúhelníky, které mají u svých vrcholů trojice čísel $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$.]

D1. Každý vrchol pravidelného 19úhelníku je obarven jednou ze šesti barev. Vysvětlete, proč stejnou barvu mají všechny vrcholy některého tupoúhlého trojúhelníku. [62–C–S–3]

D2. Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku. [62–C–I–4]