66. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Najděte všechny trojice celých čísel (a, b, c) takové, že každý ze zlomků

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

má celočíselnou hodnotu.

2. Je dána kružnice p se středem K procházející bodem M a polokružnice q nad průměrem KM. Libovolným bodem L uvnitř úsečky KM vedeme kolmici ke KM. Ta protne polokružnici q v bodě Q a kružnici p v bodech P_1, P_2 tak, že $|P_1Q| > |P_2Q|$. Přímka MQ protne kružnici p ještě v bodě $R \neq M$. Dokažte, že pro obsahy S_1 a S_2 trojúhelníků MP_1Q a P_2RQ platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$.

3. V závislosti na reálném parametru k určete počet řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + kxy + y^2 &= z, \\ y^2 + kyz + z^2 &= x, \\ z^2 + kzx + x^2 &= y \end{aligned}$$

v oboru reálných čísel.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD. Osy úhlů BAD, CAD protínají stranu BC po řadě v bodech E, F. Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H. Dokažte, že přímky EH, FG a AD se protínají v jednom bodě.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 10. ledna 2017

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

66. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Uvažovaná trojice zlomků je symetrická v tom smyslu, že nahradíme-li trojici celých čísel (a, b, c) jejich libovolnou permutací, dostaneme zase (až na pořadí) tutéž trojici zlomků. Stejně tak, nahradíme-li čísla a, b, c čísly opačnými. Tato skutečnost nám usnadní následující rozbor případů.

Předpokládejme tedy, že čísla a, b, c jsou taková, že všechny tři uvažované zlomky mají celočíselnou hodnotu. Pokud se mezi nimi nachází nula, stačí bez újmy na obecnosti vyšetřit případ $a = 0$. Po dosazení do uvažovaných zlomků dostáváme, že zlomky b/c a c/b mají celočíselnou hodnotu. Odtud plyne, že b i c jsou nenulová a je $|b| \geqq |c|$ a zároveň i $|c| \geqq |b|$, proto $c = \pm b$. Navíc číslo $b + c$ je jmenovatelem prvního zlomku, proto $b + c \neq 0$, takže musí být $b = c$. Celkově tak dostáváme (zjevně vyhovující) trojice $(0, c, c)$ a jejich permutace pro každé nenulové celé číslo c.

Zbývá vyřešit případ, kdy $abc \neq 0$.

Vzhledem k pozorování z prvního odstavce budeme předpokládat, že alespoň dvě z čísel a, b, c jsou kladná. Pokud by byla kladná všechna tři, bude zlomek, který má v čitateli nejmenší z čísel a, b, c, ležet mezi 0 a 1, takže nemůže mít celočíselnou hodnotu.

Nechť tedy a, b jsou kladná čísla a $c = -d$ pro kladné d. Po dosazení do zadání dostaneme, že zlomky

$$\frac{a}{d-b}, \quad \frac{b}{d-a}, \quad \frac{d}{a+b}$$

mají celočíselnou hodnotu. Z posledního z nich je jasné, že $d \geqq a + b$. Proto má první zlomek kladný jmenovatel, a protože jeho hodnota je celé číslo, musí platit $a \geqq d - b$ neboli $d \leqq a + b$. Je tudíž $d = a + b$ neboli $c = -a - b$ a dostáváme tak v souhrnu trojice (a, b, c) nenulových čísel, pro které platí $a + b + c = 0$. Všechny takové trojice vyhovují, neboť hodnota všech tří uvažovaných zlomků je pro ně rovna -1.

Odpověď. Úloze vyhovují všechny trojice $(0, c, c)$, $(c, 0, c)$ a $(c, c, 0)$, kde c je nenulové celé číslo, a všechny trojice (a, b, c) nenulových celých čísel, pro něž platí $a + b + c = 0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud chybí zmínka o některé z vyhovujících trojic (např. se nikde nezmiňuje jiná permutace trojice $(0, c, c)$), udělte nejvýše 5 bodů. Neúplné řešení: za úplné řešení případu, kdy je jedno z čísel a, b, c rovno 0, dejte 2 body; za vyřešení případu, kdy a, b, c jsou nenulová, dejte 4 body, z toho 1 bod za pouhé vyloučení případů, kdy všechna čísla a, b, c jsou kladná, nebo záporná. Za pozorování z prvního odstavce o permutacích trojic a změně znamének, pokud nevedou k vyřešení jednoho z uvedených dvou případů, body nedávejte. Za nalezení všech řešení (bez zdůvodnění, proč jiná již neexistují) dejte 1 bod.

2. Kružnice, jejíž částí je polokružnice q, je obrazem kružnice p ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $1/2$, takže bod Q je středem úsečky RM. Protože oba trojúhelníky, poměr jejichž obsahů nás zajímá, mají navíc shodné úhly při společném vrcholu Q, je

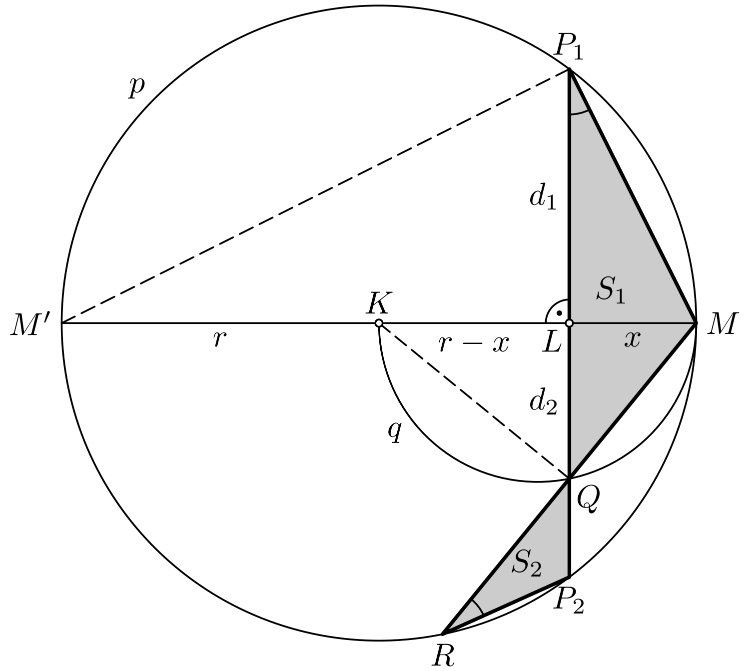
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|P_1Q| \cdot |MQ| \sin|\sphericalangle P_1QM|}{\frac{1}{2}|P_2Q| \cdot |RQ| \sin|\sphericalangle P_2QR|} = \frac{|P_1Q|}{|P_2Q|}.$$

Označme $|KM| = r$, $|ML| = x$, $|P_1L| = d_1$, $|QL| = d_2$ (obr. 1). Ze souměrnosti bodů P_1, P_2 podle KM pak plyne $|P_1L| = |P_2L|$, takže $|P_2Q| = d_1 - d_2$. Označíme-li M' druhý krajní bod průměru kružnice p s krajním bodem M, je trojúhelník $M'MP_1$

pravoúhlý. Z Eukleidovy věty pro jeho výšku P_1L dostáváme $d_1^2 = x(2r - x)$ a podobně pro výšku QL pravoúhlého trojúhelníku KQM platí $d_2^2 = x(r - x)$. Je tedy

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|P_1Q|}{|P_2Q|} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} = \frac{(d_1 + d_2)^2}{d_1^2 - d_2^2} = \frac{x(2r - x) + x(r - x) + 2\sqrt{x(2r - x) \cdot x(r - x)}}{rx}$$
$$= \frac{3r - 2x + 2\sqrt{(2r - x)(r - x)}}{r}.$$

Na výsledný výraz se lze dívat jako na funkci proměnné x s parametrem r. Na intervalu $\langle 0, r\rangle$ je tato funkce klesající (obě funkce $3r - 2x$ i $(2r - x)(r - x)$ jsou klesající), proto nabývá maximum $3 + 2\sqrt{2}$ pro $x = 0$ a minimum 1 pro $x = r$. Jelikož podle zadání $x \in (0, r)$, platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$.



Obr. 1

Jiné řešení. Body P_2, R, P_1, M leží v tomto pořadí na kružnici p, proto mají úhly MP_1P_2 a MRP_2 stejnou velikost. Shodné jsou i vrcholové úhly P_1QM a P_2QR. Podle věty *uu* jsou tudíž trojúhelníky MP_1Q a P_2RQ podobné, takže poměr jejich obsahů je čtvercem poměru délek odpovídajících si stran MQ a P_2Q. Protože $3 + \sqrt{8} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$, je tak naším cílem dokázat nerovnosti

$$1 < \frac{|MQ|}{|P_2Q|} < 1 + \sqrt{2}. \tag{1}$$

Označme opět $x = |LM|$ a r poloměr kružnice p, takže $|KL| = r - x$ (obr. 1). Využijeme toho, že trojúhelník KQM je pravoúhlý, proto pro jeho výšku LQ a odvěsnu MQ podle Eukleidových vět platí $|LQ| = \sqrt{x(r - x)}$ a $|MQ| = \sqrt{rx}$. I trojúhelník KLP_2 je pravoúhlý, proto podle Pythagorovy věty $|LP_2| = \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = \sqrt{x(2r - x)}$.

Dostáváme tak

$$\frac{|MQ|}{|P_2Q|} = \frac{|MQ|}{|LP_2| - |LQ|} = \frac{\sqrt{rx}}{\sqrt{x(2r-x)} - \sqrt{x(r-x)}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2r-x} - \sqrt{r-x}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2r-x} + \sqrt{r-x}}{\sqrt{r}}.$$

Díky nerovnostem $0 < x < r$ pro čitatel posledního zlomku platí odhady

$$\sqrt{2r-r} + \sqrt{r-r} < \sqrt{2r-x} + \sqrt{r-x} < \sqrt{2r} + \sqrt{r},$$

které už bezprostředně vedou k nerovnostem (1).

Poznámka. Nerovnost $S_1 : S_2 > 1$ plyne rovnou z předpokládané nerovnosti $|P_1Q| > |P_2Q|$, protože pak zřejmě platí $S_1 > S(LMP_1) = S(LMP_2) > S(MQP_2) = S_2$, neboť $|RQ| = |QM|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz nerovnosti $1 < S_1 : S_2$ a 4 body za důkaz druhé nerovnosti $S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$. Řešení s drobnými nedostatky v důkazech (chybí potřebná zmínka o ekvivalenci nerovností; numerická chyba v závěru důkazu apod.) hodnoťte 5 body.

Hodnocení neúplných řešení:

- ▷ 1 bod za vyjádření hodnoty $S_1 : S_2$ pomocí délek úseček — ať už úvahou o stejnolehlosti (první řešení), na základě podobnosti trojúhelníků MP_1Q a P_2RQ (druhé řešení) nebo jinak (pokud chybí zmínka o důsledcích podobnosti či stejnolehlosti pro výpočet poměru obsahů, body nedávejte);
- ▷ další 1 bod za vyjádření poměru $S_1 : S_2$ jako funkce jedné reálné proměnné;
- ▷ nejvýše 2 body za řešení, kde není prokázána ani jedna ze zadaných nerovností.

3. Danou soustavu vyřešíme a vypíšeme všechna řešení, abychom některá řešení nepočítali víckrát.

Nejprve zvážíme možnost $x = y = z$. V takovém případě se soustava redukuje na jedinou rovnici $(k+2)x^2 = x$. Řešením dané soustavy je trojice $(0, 0, 0)$ pro libovolné k a navíc trojice $\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$ v případě $k \neq -2$.

Vraťme se k dané soustavě rovnic. Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$(x^2 - z^2) + ky(x - z) = z - x$$

neboli

$$(x - z)(x + z + ky + 1) = 0. \tag{1}$$

Podobně odečtením třetí rovnice od druhé vyjde

$$(y - x)(y + x + kz + 1) = 0. \tag{2}$$

V případě $x \neq y \neq z \neq x$ se tak rovnice (1) a (2) redukují na

$$x + z + ky + 1 = 0,$$
$$y + x + kz + 1 = 0.$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $(y - z)(k - 1) = 0$, takže musí být $k = 1$ a $x + y + z = -1$. To však nemůže platit, protože pro $k = 1$ vychází

$$z = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geqq 0$$

a obdobně $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$, takže dohromady $x + y + z \geqq 0$.

Zjistili jsme, že v každém řešení zadané soustavy mají některé dvě neznámé stejnou hodnotu. Jelikož soustava je cyklická, budeme dále předpokládat $x \neq y = z$, neboť případ $x = y = z$ jsme už vyřešili. Z rovnice (1) za těchto předpokladů vyplývá, že $x + y + ky + 1 = 0$ neboli $x = -(k+1)y - 1$, a původní soustava se tím redukuje na jedinou rovnici

$$(k+2)y^2 + (k+1)y + 1 = 0. \tag{3}$$

Ještě dodejme, že řešením rovnice (3) nedostaneme žádné z již nalezených řešení, protože rovnost $x = y$ neboli $y = -(k+1)y - 1$ je možná jen pro $k \neq -2$ a dává $x = y = z = -1/(k+2)$, což mezi řešení dané soustavy nepatří.

Pro $k = -2$ je rovnice (3) lineární s jediným řešením $y = 1$, k němuž dopočítáme $x = 0$. Řešeními dané soustavy jsou tři permutace trojice $(0, 1, 1)$.

Pro $k \neq -2$ je rovnice (3) kvadratická a má reálné řešení, právě když

$$D = (k+1)^2 - 4(k+2) = k^2 - 2k - 7 \geqq 0$$

neboli právě když $k \notin (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$, jak zjistíme vyřešením výsledné kvadratické nerovnice pro k. Řešení je tedy jediné pro $k = 1 \pm 2\sqrt{2}$, přičemž

$$y_0 = -\frac{k+1}{2(k+2)} = 1 \mp \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad x_0 = \frac{(k+1)^2}{2(k+2)} - 1 = 1.$$

Řešením původní soustavy tak jsou tři permutace trojice (x_0, y_0, y_0).

Pro $k \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}, \infty)$ má kvadratická rovnice (3) dvě různá řešení

$$y_{1,2} = \frac{-k - 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k - 7}}{2(k+2)},$$

pro která dostaneme dvě různé hodnoty $x_{1,2} = -(k+1)y_{1,2} - 1$. Řešeními původní soustavy tak jsou tři permutace trojice (x_1, y_1, y_1) a tři permutace trojice (x_2, y_2, y_2).

V závěrečné tabulce uvádíme celkový počet řešení dané soustavy v závislosti na k:

interval pro k	$(0,0,0)$	$\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$	rovnice (3)	celkově
$(-\infty, -2)$	1	1	6	8
-2	1	0	3	4
$(-2, 1 - 2\sqrt{2})$	1	1	6	8
$1 - 2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$	1	1	0	2
$1 + 2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1 + 2\sqrt{2}, \infty)$	1	1	6	8

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyřešení případu $x = y = z$, 2 body za důkaz neexistence řešení v případě $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$ a 3 body za zbývající případ (z toho 1 bod za vyřešení situace $k = -2$). Za drobné nedostatky (nesprávně určené kořeny trojčlenu $k^2 - 2k - 7$, nesprávně dopočtená hodnota x z hodnoty y apod.) strhněte dohromady jen 1 bod. Vypisovat všechny trojice řešící danou soustavu není v úplném řešení nezbytné, pokud je v postupu zdůvodněno, že trojice odpovídající řešením rovnice (3) nejsou tvořeny třemi stejnými čísly. Pokud toto zdůvodnění v jinak úplném řešení chybí, udělte 5 bodů. Pokud jediná chyba při určení počtu řešení je opomenutí permutací proměnných, strhněte 1 bod.

Za uhodnutí řešení (byť ověřené zkouškou) nedávejte žádné body, pokud není zcela vyřešen ani jeden ze zmíněných tří případů (včetně zdůvodnění, že jiná řešení už neexistují). Postup, kdy řešitel pro některou hodnotu k uhodne množinu řešení a dokáže, že více řešení pro dané k neexistuje (např. pomocí redukce soustavy na polynomiální rovnici pro jednu z neznámých): pokud není ani naznačeno, jak lze pomocí tohoto postupu určit, jak se mění počet řešení soustavy v závislosti na k, udělte 1 bod; jinak nejvýše 6 bodů v závislosti na tom, kolik z podstatných intervalů pro k (viz tabulku v závěru uvedeného řešení) umožnil tento postup vyřešit.

4. Označme K průsečík úseček FG a AE a L průsečík EH a AF (obr. 2). Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou AF (body A, G, E, F leží v tomto pořadí na kružnici opsané trojúhelníku AEF) plyne, že

$$|\sphericalangle AGF| = |\sphericalangle AEF| = 90^\circ - |\sphericalangle DAE| = 90^\circ - |\sphericalangle GAE|$$

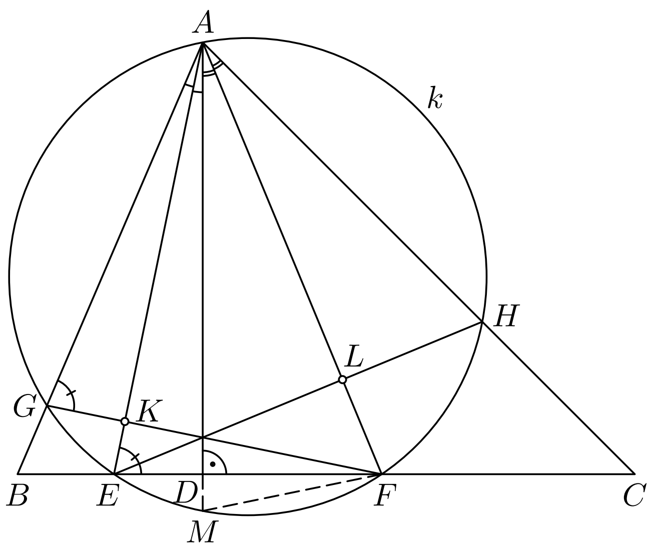
neboli

$$|\sphericalangle AGF| + |\sphericalangle GAE| = 90^\circ,$$

takže

$$|\sphericalangle AKG| = 180^\circ - (|\sphericalangle AGF| + |\sphericalangle GAE|) = 90^\circ.$$

Úsečka FK je tudíž výškou trojúhelníku AEF. Analogicky dokážeme, že i EL je jeho výškou, a proto průsečík přímek FK a EL je ortocentrem trojúhelníku AEF, kterým přirozeně prochází i jeho třetí výška AD.



Obr. 2

Jiné řešení. Označme M další průsečík polopřímky AD s kružnicí k opsanou trojúhelníku AEF (obr. 2). Jelikož AE je osou úhlu GAM, jsou shodné obvodové úhly GAE a EAM v kružnici k, a proto jsou shodné i její tětivy GE a EM, a tudíž i obvodové úhly GFE a EFM. Průsečík přímek FG a AM je tedy obrazem bodu M v osové souměrnosti s osou EF. Stejnou úvahu můžeme udělat i pro průsečík přímek EH a AM, proto musejí být oba průsečíky totožné.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Kromě postupu v prvním řešení lze využít i rovnost obvodových úhlů nad tětivou GE a ukázat, že body A, K, D, F leží na kružnici s průměrem AF. Za hypotézu (neodůvodněné pozorování), že $FG \perp AE$ (resp. $EH \perp AF$), dávejte 2 body, pokud řešitel zdůvodní, že to stačí k vyřešení úlohy (např. úvahou o průsečíku výšek trojúhelníku AEF), jinak jen 1 bod. Řešiteli, který pracuje s bodem M z druhého řešení a zdůvodní, že E je střed oblouku GM (nebo že F je středem oblouku HM), nedostane se však dále, dejte 2 body (samotné zavedení bodu M nebodujte).