66. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

2. V rovině je dáno 2 017 takových bodů, že z každé trojice lze vybrat dva, jejichž vzdálenost je menší než 1. Dokažte, že existuje kruh o poloměru 1, který obsahuje aspoň 1 009 daných bodů.

3. V rovině jsou dány kružnice k a l, které se protínají v bodech E a F. Tečna ke kružnici l sestrojená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k, který neobsahuje bod F, zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné.

4. Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby rovnice

$$2\,017 \cdot \Big|1 - \big|1 - |1 - x|\big|\Big| = 2\,016x + p$$

měla právě tři řešení v oboru reálných čísel.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 11. dubna 2017

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Anulováním pravé strany upravíme danou rovnici na tvar

$$a-b+66\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\Big)=(a-b)\Big(1-\frac{66}{ab}\Big)=\frac{1}{ab}(a-b)(ab-66)=0.$$

Odtud plyne, že hledané dvojice (a,b) přirozených čísel jsou právě ty, pro které platí $a=b$ nebo $ab=66$.

Úloze tedy vyhovuje nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel tvaru $(a,b)=(k,k)$, kde k je libovolné přirozené číslo, a protože číslo $66=2\cdot 3\cdot 11$ má osm dělitelů, tak i osm dvojic $(a,b)\in\{(1,66),(2,33),(3,22),(6,11),(11,6),(22,3),(33,2),(66,1)\}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé konstatování, že úloze vyhovují dvojice $a=b$ (bez uvedení dalších 8 řešení), udělte 1 bod. Pokud žák upraví danou rovnici do součinového tvaru, avšak opomene uvést dalších 8 konkrétních řešení, udělte 3 body. V případě, kdy žák neuvede 1, resp. 2 (nebo 3) symetrické dvojice z výčtu konkrétních řešení, strhněte 1, resp. 2 body.

2. Můžeme předpokládat, že mezi danými body existují dva (označme je A, B), jejichž vzdálenost je větší než 1. Jinak by totiž všechny dané body ležely v kruhu o poloměru 1 se středem v libovolném z daných bodů.

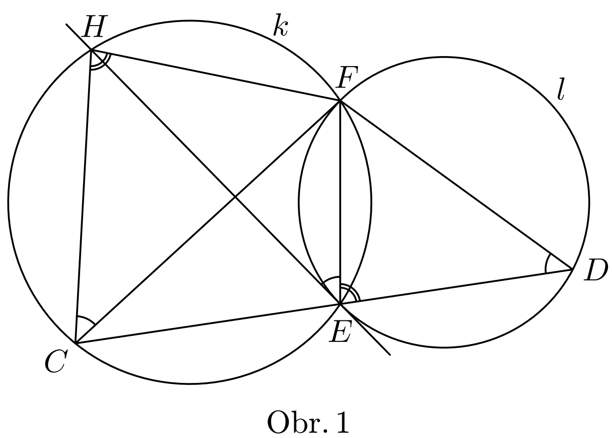
Uvažujme dva kruhy $k(A;1)$ a $l(B;1)$. Kdyby mezi danými 2 017 body existoval bod C, který neleží ani v jednom z kruhů k a l, pak by trojice bodů A, B, C nesplňovala podmínky úlohy, protože by bylo $|AB|>1$, $|AC|>1$ a $|BC|>1$. Proto všechny dané body leží ve sjednocení kruhů k a l, tudíž aspoň v jednom z nich leží aspoň 1 009 z daných 2 017 bodů, neboť jinak by jich dohromady bylo nejvýše $2\cdot 1\,008<2\,017$.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

3. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou HF kružnice k plyne $|\sphericalangle HCF|=|\sphericalangle HEF|$. Úhel HEF je zároveň úsekovým úhlem příslušným tětivě EF kružnice l, který je však shodný s obvodovým úhlem EDF (obr. 1). Celkově tak platí

$$|\sphericalangle HCF|=|\sphericalangle HEF|=|\sphericalangle EDF|. \tag{1}$$



Obr. 1

Vzhledem k tomu, že $CEFH$ je tětivový čtyřúhelník, je jeho vnitřní úhel při vrcholu H shodný s vnějším úhlem u jeho protějšího vrcholu E. Platí tedy

$$|\sphericalangle CHF| = |\sphericalangle DEF|. \tag{2}$$

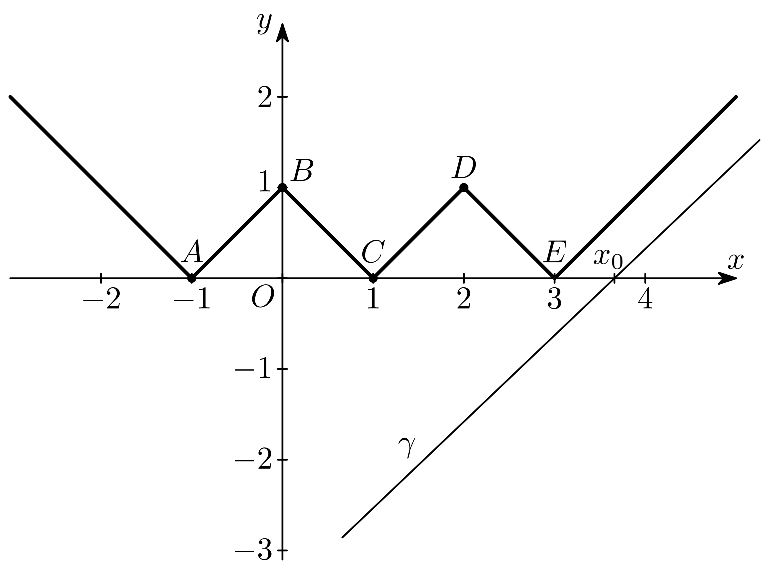
Z rovností (1) a (2) plyne na základě věty *uu* podobnost trojúhelníků DEF a CHF. Tím je důkaz hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2, resp. 4 body udělte za důkaz shodnosti jedné, resp. obou dvojic odpovídajících si úhlů v dvojici podobných trojúhelníků (jakýmkoli správným způsobem). Poslední 2 body udělte za využití shodnosti zmíněné dvojice úhlů k důkazu podobnosti obou trojúhelníků.

4. Danou rovnici upravíme do tvaru

$$\big|1 - |1 - |1 - x||\big| = \frac{2\,016}{2\,017}\,x + \frac{p}{2\,017}. \tag{1}$$

Při řešení využijeme grafickou metodu. Grafem funkce $y = f(x) = \big|1 - |1 - |1 - x||\big|$ na levé straně rovnice (1) je čára lomená v bodech $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, $C = [1, 0]$, $D = [2, 1]$ a $E = [0, 3]$ (znázorněná na obr. 2), jež sestává ze čtyř shodných úseček a dvou polopřímek. Grafem funkce g na pravé straně (1) je přímka $y = kx + q$ se směrnicí $k = \frac{2\,016}{2\,017} < 1$ procházející bodem $[0, q]$, kde $q = p/2\,017$ (směrnice je natolik „blízká“ jedničce, že jsme museli pro přímku γ, jež na obr. 2 znázorňuje graf funkce g, zvolit směrnici o pár procent menší, aby se výsledná přímka nejevila jako rovnoběžka s částmi grafu funkce f).



Obr. 2

Počet reálných řešení rovnice (1) zřejmě odpovídá počtu společných bodů grafů obou funkcí f a g. Protože všechny přímky, na nichž leží části lomené čáry grafu funkce f mají směrnici ± 1, není těžké zjistit, kolik průsečíků pro dané q obě funkce mají. Vyšetříme nyní počet průsečíků obou grafů podle hodnoty x_0, v níž přímka γ grafu funkce g protne souřadnicovou osu x.

Pro $x_0 > 3$ zřejmě žádný průsečík neexistuje. Pro $x_0 = 3$ protne γ graf funkce f v jediném bodě E. Pro $x_0 < 3$ protne γ vnitřek polopřímky grafu f s počátkem v bodě E

právě jednou. Pro $x_0 < -1$ protne γ vnitřek i druhé polopřímky grafu f, jež má počátek v bodě A, takže pro taková x_0 už máme dva společné body. Pro $x_0 \in \langle -1, 3)$ má ovšem přímka γ s lomenou čárou $ABCDE$ právě dva potřebné průsečíky, jedině když prochází jejími vrcholy D, C nebo A, a konečně pro $x_0 < -1$ právě jeden potřebný průsečík, jedině když prochází vrcholem B.

To znamená, že grafy obou funkcí mají právě tři společné body, jedině když přímka γ prochází některým ze čtyř bodů A, B, C, D na obr. 2. Postupným dosazením souřadnic těchto čtyř bodů do rovnice

$$y = kx + q = \frac{2\,016}{2\,017}x + \frac{p}{2\,017}$$

přímky γ určíme hledané hodnoty parametru p.

Odpověď. Daná rovnice má právě tři reálná řešení, právě když $p \in \{-2\,016, -2\,015, 2\,016, 2\,017\}$.

Poznámka. Lomená čára grafu funkce f rozděluje rovinu na dvě (neomezené) oblasti, přičemž přímka γ pro libovolnou hodnotu parametru q protíná oblast „nad“ lomenou čárou v několika úsečkách, a ty mají s hranicí té oblasti společný sudý počet bodů, některé krajní body dvou úseček však mohou právě v případě vrcholů uvedené lomené čáry splynout v jediný. Z této úvahy tak plyne, že jen ty přímky, které procházejí některým z vrcholů A, B, C, D, E lomené čáry, s ní mohou mít lichý počet průsečíků, v případě vrcholu E ovšem jen jeden.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nákres grafu funkce s třemi absolutními hodnotami. Konstatování o vyhovujících vzájemných polohách lomené čáry a přímky lze považovat (stejně jako ve vzorovém řešení) za zřejmé, a tak je oceňte 2 body, konečně 1 bod udělte za dopočet hodnot p. Chybí-li ve výčtu vyhovujících poloh k z nich, strhněte k bodů, pokud $k \leqq 2$; v případě $k \geqq 3$ lze celkem získat nejvýše 3 body (za správný graf podle první věty pokynů).