66. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Najděte všechny mnohočleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty splňující

$$1 < P(1) < P(2) < P(3) \qquad \text{a zároveň} \qquad \frac{P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)}{4} = 17^2.$$

2. Čtvercovou tabulku 6×6 zaplníme všemi celými čísly od 1 do 36.
a) Uveďte příklad takového zaplnění tabulky, kdy součet každých dvou čísel ve stejném řádku či ve stejném sloupci je větší než 11.
b) Dokažte, že při libovolném zaplnění tabulky se v některém řádku nebo sloupci najdou dvě čísla, jejichž součet nepřevyšuje 12.

3. Dokažte, že obdélník o rozměrech 32×120 lze zakrýt sedmi shodnými čtverci o straně 30.

4. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ platí:

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 3.$$

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 11. dubna 2017

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

66. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Rovnost ze zadání je ekvivalentní rovnosti $P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 4 \cdot 17^2$, takže čísla $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ mohou být pouze z množiny dělitelů čísla $4 \cdot 17^2$ větších než 1:

$$2 < 4 < 17 < 2 \cdot 17 < 4 \cdot 17 < 17^2 < 2 \cdot 17^2 < 4 \cdot 17^2.$$

Pokud by platilo $P(1) \geqq 4$, byl by součin $P(1)P(2)P(3)$ aspoň $4 \cdot 17 \cdot (2 \cdot 17) = 8 \cdot 17^2$, což nevyhovuje zadání. Proto $P(1) = 2$ a potom je nutně $P(2) = 17$, protože kdyby bylo $P(2) = 4$, musel by být daný součin $4 \cdot 17^2$ dělitelný číslem $P(1)P(2) = 8$, což neplatí, a pro $P(2) \geqq 2 \cdot 17$ by byl součin $P(1)P(2)P(3)$ opět příliš velký. Pro třetí neznámou hodnotu $P(3)$ pak vychází $P(3) = 4 \cdot 17^2/(2 \cdot 17) = 2 \cdot 17$.

Hledané koeficienty a, b, c tak jsou právě taková celá čísla, která vyhovují soustavě

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b + c = 2, \\ P(2) &= 4a + 2b + c = 17, \\ P(3) &= 9a + 3b + c = 34. \end{aligned}$$

Jejím vyřešením dostaneme $a = 1$, $b = 12$, $c = -11$.

Závěr: Úloze vyhovuje jediný mnohočlen $P(x) = x^2 + 12x - 11$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování faktu, že $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ jsou z množiny dělitelů čísla $4 \cdot 17$ udělte 1 bod, za vypsání všech dělitelů body neudělujte. Za odvození hodnot, kterým se musejí rovnat čísla $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ přidělte 3 body. Za sestavení (1 bod) a vyřešení (1 bod) soustavy pak závěrečné 2 body (tyto body udělte i v případě, kdy hodnoty $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ jsou určeny chybně, nicméně soustava s nimi je sestavena a vyřešena správně).

2. a) Abychom dosáhli požadovaného rozmístění čísel v tabulce, nesmějí v žádném řádku ani sloupci spolu zůstat dvě z čísel nejvýše rovných šesti. Proto jednu z mnoha vyhovujících tabulek sestavíme, když čísla od 1 do 6 vepíšeme shora dolů do polí jedné úhlopříčky a dále budeme postupně zdola nahoru brát řady polí rovnoběžných s druhou úhlopříčkou a do volných míst každé z nich vepisovat shora dolů zbylá čísla 7, 8 atd. až 36:

1	35	33	29	25	19
36	2	30	26	20	15
34	31	3	21	16	11
32	27	22	4	12	9
28	23	17	13	5	7
24	18	14	10	8	6

Nejmenší součty dvou čísel z jednotlivých řádků (shora dolů) jsou

$$1 + 19,\ 2 + 15,\ 3 + 11,\ 4 + 9,\ 5 + 7,\ 6 + 8$$

a z jednotlivých sloupců (zleva doprava)

$$1 + 24,\ 2 + 18,\ 3 + 14,\ 4 + 10,\ 5 + 8,\ 6 + 7.$$

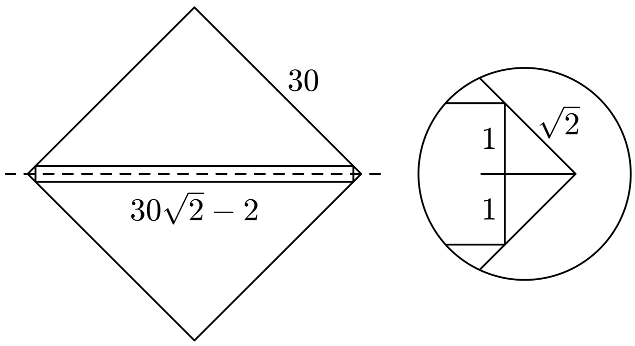
Rychlejší popis příkladu vyhovující tabulky a jeho snazší kontrolu dostaneme, když do tabulky vepíšeme pouze čísla od 1 do 12, jak vidíme níže. Rozmístění čísel od 13 do 36 na prázdná políčka už zřejmě může být libovolné — dvě nejmenší čísla v každém řádku i sloupci jsou totiž právě ta od 1 do 12.

1	11				
12	2				
		3	9		
		10	4		
				5	7
				8	6

b) Jsou-li dvě z čísel od 1 do 6 ve stejném řádku nebo ve stejném sloupci, jejich součet nepřevýší dokonce ani číslo $6 + 5 = 11$. V opačném případě jsou čísla od 1 do 6 rozmístěna ve všech řádcích i všech sloupcích, takže číslo 7 je ve stejném řádku s číslem x a ve stejném sloupci s číslem y, kde x a y jsou dvě *různá* čísla od 1 do 6. Pak menší z čísel $7 + x$ a $7 + y$ nepřevýší menší z čísel $7 + 6$ a $7 + 5$, tedy číslo 12. Tím je tvrzení dokázáno.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Každou z částí ohodnoťte třemi body. V části a) stačí uvést jakýkoli příklad, nejmenší součty dvou čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích není nutno vypisovat, rovněž není nutno určovat konkrétní pozice několika nejvyšších čísel, je-li to zdůvodněno — například v úplném příkladu ze vzorového řešení nezávisí na umístění čísel od 25 do 36 na patřičných dvanáct polí. V části b) udělte 1 bod za úvahu o rozmístění nejmenších čísel od 1 do 6; další body nestrhávejte, když řešitel dále uvažuje pouze umístění těchto šesti čísel na jednu z úhlopříček tabulky.

3. Čtyřmi čtverci o straně 30 zřejmě zakryjeme obdélník 30×120. Zbylou část 2×120 rozdělíme na tři shodné části, totiž obdélníky 2×40, a ukážeme, jak každý z nich (stejně) pokrýt jedním ze tří zbývajících čtverců o straně 30. Dosáhneme toho, když čtverec položíme na obdélník tak, že obě úhlopříčky čtverce budou ležet na osách souměrnosti dotyčného obdélníku. Stačí pak ukázat, že obdélník o straně 2 vepsaný do čtverce podle obr. 1 má druhou stranu delší než 40. Její délka je totiž zřejmě $30\sqrt{2} - 2$



Obr. 1

(od úhlopříčky čtverce odečítáme na každé straně 1 coby velikost výšky pravoúhlého trojúhelníku o stranách 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, viz zvětšenou část obr. 1), takže stačí ukázat, že

$30\sqrt{2} - 2 \geqq 40$. To je ekvivalentní s nerovností $5\sqrt{2} \geqq 7$ neboli $50 \geqq 49$, což je splněno. Daný obdélník 32×120 tedy vskutku lze zakrýt sedmi čtverci o straně 30.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za redukci úlohy na pokrytí obdélníku 2×120 třemi čtverci o straně 30 udělte 1 bod. Za uvažování vepsaných obdélníků 2×něco dejte rovněž 1 bod. Za výpočet jejich delší strany 2 body. Úvahu, že k pokrytí obdélníku 2×40 či celého 2×120 postačuje platnost nerovnosti $30\sqrt{2} - 2 > 40$ či $90\sqrt{2} - 6 > 120$ oceňte jedním bodem a její důkaz rovněž jedním bodem.

4. Nerovnost vynásobíme kladným výrazem abc a po roznásobení ji postupně (ekvivalentně) upravíme:

$$\begin{aligned}
-a(bc+ac+ab)+b(bc+ac+ab)+c(bc+ac+ab) &\geqq 3abc,\\
-abc-a^2c-a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc &\geqq 3abc,\\
(b^2c-abc)+(bc^2-abc)+(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b) &\geqq 0,\\
bc(b-a)+bc(c-a)+ac(c-a)+ab(b-a) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu $0 < a \leqq b \leqq c$ je výsledná, a tedy i původní nerovnost splněna.

Jiné řešení. Dokazovanou nerovnost postupně upravíme, přičemž využijeme známou nerovnost $b/c + c/b \geqq 2$, která je pro kladná čísla b, c ekvivalentní s nerovností $(b-c)^2 \geqq 0$:

$$\begin{aligned}
(-a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) &= 1+\Big(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\Big)+\Big(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\Big)+\Big(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\Big) \geqq\\
&\geqq 1+\frac{b^2-a^2}{ab}+\frac{c^2-a^2}{ac}+2 \geqq 3,
\end{aligned}$$

protože zřejmě platí i $a^2 \leqq b^2 \leqq c^2$.

Jiné řešení. Podle předpokladů úlohy platí nerovnosti

$$-a+b+c \geqq c \quad \text{a} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{2}{b}+\frac{1}{c}.$$

Obě nerovnosti (s kladnými stranami) mezi sebou vynásobíme a získáme tak

$$(-a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqq c\Big(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\Big) = 1+\frac{2c}{b} \geqq 3,$$

neboť $c/b \geqq 1$ dle zadání.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za násobení nerovnice výrazem, o kterém není řečeno, že je kladný, strhněte 1 bod. Za použití nerovnosti $x/y + y/x \geqq 2$ bez konstatování kladnosti x a y strhněte rovněž bod.