11. Středoevropská matematická olympiáda

Dějištěm jedenácté Středoevropské matematické olympiády (MEMO), která se konala ve dnech 21.–27. srpna 2017, byl litevský Vilnius. Soutěže se zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarska, Německa, Slovinska, Chorvatska, Maďarska, Slovenska, Rakouska, Polska, České republiky a pořádající Litvy) a také šestice žáků z hostujícího Běloruska. Každou zemi reprezentovali žáci, kteří v uplynulém školním roce nematurovali.

České reprezentační družstvo bylo složeno ze dvou vítězů a čtyř úspěšných řešitelů ústředního kola 66. ročníku MO v kategorii A. Byli jimi: *Filip Svoboda* (3/4 G Brno, Elgartova), *Radek Olšák* (6/8 Mensa G, Praha), *Josef Minařík* (6/8 G Brno, Kpt. Jaroše), *Matěj Doležálek* (6/8 G Humpolec), *Tomáš Perutka* (7/8 G Brno, Kpt. Jaroše) a *Jiří Škrobánek* (7/8 WG Ostrava-Poruba). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *Michal Rolínek, PhD.,* z IST Austria ve Vídni, pedagogickým vedoucím družstva byl *Mgr. Radek Horenský, Ph.D.,* z Gymnázia Šternberk.

Po vyčerpávajících jednáních vybrala mezinárodní jury všech 12 soutěžních úloh, tedy čtyři do individuální soutěže a osm do soutěže týmů. Individuální soutěž se konala 23. srpna, týmová soutěž proběhla dne následujícího. Soutěžní prostory, jakož i zázemí pro jednání jury, poskytla matematicko-fyzikální fakulta místní univerzity.

Následující dva dny po soutěži jednotlivců probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Každá soutěžní úloha byla přitom hodnocena nejvýše 8 body. Soutěžící se mezitím se svými místními průvodci vydali na prohlídku vilniuského energeticko-technologického muzea a dalšího dne také do etnografického muzea ve vesničce Rumšiškes nedaleko Kaunasu. Došlo tak i na navazování kontaktů napříč Evropou a můžeme jen s radostí konstatovat, že naše družina si (alespoň) v této disciplíně vedla znamenitě. V den slavnostního vyhlášení byli soutěžící odměněni celodenní zábavou v akvaparku, zatímco vedoucím delegací přišla vhod exkurze v pivovaru.

Nyní k výsledkům. V soutěži jednotlivců bylo letos uděleno 7 zlatých, 10 stříbrných a 18 bronzových medailí, v soutěži týmů pak po jedné sadě každého druhu. Z hlediska české výpravy lze považovat za přijatelné výsledky individuální. Největšího úspěchu, stříbrné medaile, dosáhl *Matěj Doležálek*, jemuž smolně o jediný bod utekla medaile zlatá. Dva bronzové zásahy zaznamenali *Josef Minařík* a *Filip Svoboda.* Politováníhodný je příběh *Radka Olšáka*, který své dobré nápady buďto nedotáhl do konce, anebo ke svým řešením vůbec nepřipojil. Vinou své řešitelské nevyzrálosti tak namísto útoku na stříbrnou medaili odjel pouze s čestným uznáním. Výkon našeho družstva v týmové soutěži nebyl podařený; sdílené předposlední místo se do historických tabulek vskutku nezapíše tím nejlepším způsobem.
Podrobnější informace doplněné fotogalerií ze soutěže mohou zájemci nalézt na oficiálním webu 11. MEMO (memo2017.lmnsc.lt).

Na dalších stránkách uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců

(23. srpna 2017)

Příklad I–1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

(*Slovensko*)

Příklad I–2

Ať $n \geqslant 3$ je kladné celé číslo. Označení n vrcholů, n stran a vnitřku pravidelného n-úhelníka pomocí $2n + 1$ různých celých čísel nazveme *memořádné*, jestliže platí následující podmínky:

(a) Každá strana je označena číslem rovným aritmetickému průměru čísel označujících její koncové body.

(b) Vnitřek je označen číslem rovným aritmetickému průměru všech n čísel označujících vrcholy.

Určete všechna $n \geqslant 3$, pro něž existuje memořádné označení pravidelného n-úhelníka využívající $2n + 1$ po sobě jdoucích celých čísel.

(*Josef Tkadlec, Česká republika*)

Příklad I–3

Označme P průsečík úhlopříček CE a BD konvexního pětiúhelníku $ABCDE$. Ukažte, že pokud platí $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ACB|$ a $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle EDA|$, pak středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE leží na přímce s bodem P.

(*Slovensko*)

Příklad I–4

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $|2^m - 181^n|$, v němž m a n jsou kladná celá čísla.

(*Německo*)

Soutěž družstev

(24. srpna 2017)

Příklad T–1

Určete všechny dvojice polynomů (P, Q) s reálnými koeficienty takové, že rovnost

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

(*Polsko*)

Příklad T–2

Určete nejmenší reálnou konstantu C takovou, že nerovnost

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

platí pro všechna reálná čísla x, y a z splňující $x + y + z = -1$.

(*Rakousko*)

Příklad T–3

Na každém políčku tabulky 2017×2017 je žárovka, která je buďto zapnutá, nebo vypnutá. Žárovku nazveme *šeroslepou*, pokud má sudý počet zapnutých sousedů. Jaký je nejmenší možný počet šeroslepých žárovek?

(Dvě žárovky považujeme za sousední, pokud jimi obsazená políčka sdílí hranu.)

(*Rakousko*)

Příklad T–4

Ať $n \geqslant 3$ je kladné celé číslo. O posloupnosti P_1, P_2, $\ldots$, P_n navzájem různých bodů v rovině řekneme, že je *správná*, pokud žádné tři z nich neleží v přímce, lomená čára $P_1P_2\ldots P_n$ neprotíná samu sebe a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-2$ je trojúhelník $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orientovaný proti směru hodinových ručiček. Pro každé celé číslo $n \geqslant 3$ určete největší celé číslo k s následující vlastností: Lze najít n po dvou různých bodů A_1, A_2, $\ldots$, A_n v rovině, pro něž existuje k různých permutací $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $\ldots$, $A_{\sigma(n)}$ je správná.
(Lomená čára $P_1P_2\ldots P_n$ sestává z úseček P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{n-1}P_n$.)

(*Polsko*)

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$ s kružnicí opsanou k. Označme M střed kratšího oblouku BC kružnice k a D průsečík polopřímek AC a BM. Dále ať E ($E \neq C$) je průsečík osy úhlu ACB s kružnicí opsanou trojúhelníku BDC. Předpokládejme, že E leží uvnitř trojúhelníku ABC a lze najít společný bod N přímky DE a kružnice k takový, že E je středem úsečky DN. Ukažte, že N je středem úsečky I_BI_C, kde I_B a I_C jsou středy kružnic připsaných trojúhelníku ABC postupně ke stranám AC a AB.

(*Chorvatsko*)

Příklad T–6

Kružnici k se středem O je vepsán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| \neq |AC|$. Ke kružnici k sestrojme tečny v bodech B a C a jejich průsečík označme D. Dále protněme přímky AO a BC v bodě E, označme M střed úsečky BC a N ($N \neq A$) průsečík přímky AM s kružnicí k. Konečně sestrojme bod F ($F \neq A$) na kružnici k tak, aby body A, M, E a F ležely na jedné kružnici. Ukažte, že přímka FN půlí úsečku MD.

(*Slovensko*)

Příklad T–7

Určete všechna celá $n \geqslant 2$ taková, že čísla $0, 1, \ldots, n-1$ lze seřadit do posloupnosti x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1} tak, aby součty

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$

dávaly navzájem různé zbytky po dělení n

(*Polsko*)

Příklad T–8

Pro celé číslo $n \geqslant 3$ definujeme posloupnost α_1, α_2, $\ldots$, α_k jako posloupnost exponentů v provčíselném rozkladu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla. Určete všechna celá čísla $n \geqslant 3$, pro něž je α_1, α_2, $\ldots$, α_k geometrická posloupnost.

(*Rakousko*)

Následující (12.) ročník MEMO se bude konat na základě oficiálního pozvání v roce 2018 v Polsku.

Michal Rolínek