Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $O - X$, kde O je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více koleček než křížků a X je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více křížků než koleček.*

a) Dokažte, že pro tabulku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n+1) \times (2n+1)$ v závislosti na n.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každá dvě kladná celá čísla $k \leqq n$ lze všechna políčka tabulky $n \times n$ obarvit černě a bíle tak, aby se v každém řádku a každém sloupci nacházelo přesně k černých políček. [Skupinu k černých políček vyberme v prvním řádku tabulky libovolně. V každém dalším řádku posuneme černá políčka o 1 místo doprava ve srovnání s aktuálním řádkem, přitom políčka z posledního sloupce přesouváme do sloupce prvního. Dostaneme tak vyhovující obarvení, neboť označíme-li černá políčka v prvním řádku čísly 1 až k a zachováme-li je při posunech políček v dalších řádcích, z úvahy o počtu posunů mezi libovolnými dvěma řádky nám vyplyne, že v každém sloupci tabulky bude nakonec právě po jednom políčku s čísly 1 až k.]

D1. Určete nejvyšší možné skóre $O - X$ ze soutěžní úlohy dosažitelné pro tabulku $2n \times 2n$ v závislosti na n. [Pro $n = 1$ vyjde 0, pro $n = 2$ vyjde 2, pro $n \geqq 3$ vyjde $4n - 8$.]

2. *Dokažte, že pokud je součet dvou daných reálných čísel a, b větší než 2, má soustava nerovnic*

$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$

nekonečně mnoho řešení x v oboru reálných čísel.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť $a > 0$, b a $c < 0$ jsou reálná čísla. Dokažte, že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jeden kladný a jeden záporný kořen. [Buď využijte jen nerovnosti $a > 0$ a $c < 0$, kde c je hodnota uvažovaného trojčlenu v nule, nebo zapište známé vzorce pro kořeny a přihlédněte k nerovnosti $D = b^2 - 4ac > b^2$.]

D1. Dokažte, že pokud reálná čísla a, b, c splňují $c(a + b + c) < 0$, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má řešení x v intervalu $(0, 1)$. [Označíme-li $f(x) = ax^2 + bx + c$, pak $f(0) \cdot f(1) < 0$, tedy jedna z hodnot $f(0)$, $f(1)$ je kladná a druhá je záporná.]

D2. Předpokládejme, že pro trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty a, b, c nemá rovnice $f(x) = x$ žádné řešení v oboru reálných čísel. Dokažte, že je nemá ani rovnice $f(f(x)) = x$. [Platí buď $f(x) > x$ pro všechna x, nebo $f(x) < x$ pro všechna x, proto také platí buď $f(f(x)) > f(x) > x$ pro všechna x, nebo $f(f(x)) < f(x) < x$ pro všechna x.]

3. *V rovině jsou dány dvě shodné kružnice o poloměru 1, které mají vnější dotyk. Uvažujme pravoúhelník obsahující obě kružnice, jehož každá strana se dotýká aspoň jedné z nich. Určete největší a nejmenší možný obsah takového pravoúhelníku.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Do rovnostranného trojúhelníku o straně 1 jsou vepsány tři shodné kružnice, z nichž každá se vně dotýká zbylých dvou kružnic a současně se dotýká právě dvou stran tohoto trojúhelníku. Určete poloměr těchto tří kružnic. [$\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. Hledaný poloměr r splňuje $2r + 2r\operatorname{cotg} 30^\circ = 1$.]
2. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $-\sqrt{2} \leqq \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}$. [Buď dokazujte ekvivalentní nerovnost $(\sin x + \cos x)^2 \leqq 2$, nebo využijte úpravu na výraz s hodnotou $\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.]
3. Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, pro které má výraz $V = rs - tu$ nejmenší kladnou hodnotu. [44–B–I–3]

D1. V obdélníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ leží vzájemně se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD, k_2 se dotýká stran AB a BC.
  a) Dokažte, že $r_1 + r_2 = 5$.
  b) Určete nejmenší a největší možnou hodnotu obsahu trojúhelníku AS_1S_2.
  [62–A–S–1]

4. *Najděte největší přirozené číslo n takové, že hodnota součtu*

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než x.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
2. Dokažte, že $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
3. Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

$$\left\lfloor \sqrt[1\,989]{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1\,988}{1\,989}} \right\rfloor = 1\,990.$$

[38–B–II–4]

D1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \ldots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

[Tabulku $n \times n$ vyplníme čísly tak, že do políčka v a-tém řádku a b-tém sloupci vepíšeme číslo a^b a počet políček, ve kterých je číslo nepřevyšující n, spočítáme dvěma způsoby: po sloupcích a po řádcích.]

5. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jestliže v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$, je $AB \parallel CD$ a $|BC| = |AD|$. Dokažte. [Ukažte, že trojúhelníky ABC a BAD jsou souměrně sdružené podle osy tětivy AB opsané kružnice.]
2. Je dán trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k. Označme D střed oblouku BC kružnice k obsahujícího bod A. Dokažte, že v případě $A \neq D$ je přímka AD osou vnějšího úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu A. [Nechť např. $|AB| < |AC|$. Pak polopřímka AD dělí úhel CAX, kde X je bod na prodloužení strany AB za vrchol A, na dva úhly: jeden je úhel DAC shodný s úhlem DBC, druhý je vnější úhel u vrcholu A tětivového čtyřúhelníku $ABCD$, shodný s protějším vnitřním úhlem BCD.]

D1. Na stranách AB, AC různostranného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body X, Y tak, že $|BX| = |CY| = d > 0$. Dokažte, že osa úsečky XY prochází pevným bodem nezávislým na d. [Je to střed M oblouku BAC: trojúhelníky XBM a YCM jsou shodné podle věty *sus*.]

6. *Najděte největší možný počet prvků množiny* M *celých čísel, která má následující vlastnost: Z každé trojice různých čísel z* M *lze vybrat některá dvě, jejichž součet je mocninou čísla* 2 *s celočíselným exponentem.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Rozhodněte, zda existují tři přirozená čísla $x > y > z$ taková, že $x+y$ i $x+z$ jsou mocniny dvou. [Uvažte, kolik různých mocninou dvou může ležet v intervalu mezi čísly x a $2x$ pro dané přirozené x.]
2. Na večírku má každý člověk lichý počet známých („znání se“ je vzájemné). Dokažte, že počet lidí na večírku je sudý. [Součet všech počtů známých jednotlivých osob je roven dvojnásobku počtu všech dvojic osob, které se znají, takže to je číslo sudé.]

D1. Každou stranu a úhlopříčku pravidelného šestiúhelníku jsme obarvili červeně nebo modře. Dokažte, že existuje trojúhelník s vrcholy ve vrcholech původního šestiúhelníku, jehož všechny tři strany mají stejnou barvu. [Důkaz tohoto prvotního výsledku tzv. Ramseyovy teorie najdete v přehledném článku J. Šimša, Ramseyova čísla a jejich uplatnění v geometrii, URL: `mfi.upol.cz/old/MFI_17_pdf/Mat_17_10.pdf`.]