Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechny mnohočleny tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, které při dělení dvojčlenem $2x^2 + 1$ dávají zbytek $x + 2$ a při dělení dvojčlenem $x^2 + 2$ dávají zbytek $2x + 1$.*

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Určete podíl a zbytek při dělení mnohočlenu $2x^3 + x^2 - 3x + 5$ dvojčlenem $x^2 - x$. Tuto skutečnost zapište ve formě rovnosti bez použití zlomků. [$2x^3 + x^2 - 3x + 5 = (x^2 - x)(2x + 3) + 5$]
2. Určete všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$, které jsou beze zbytku dělitelné jak dvojčlenem $x - 2$, tak dvojčlenem $x + 1$. [$ax^2 - ax - 2a$, $a \neq 0$]
3. Najděte všechny trojčleny $p(x) = ax^2+bx+c$, které dávají po dělení dvojčlenem $x + 1$ zbytek 2 a po dělení dvojčlenem $x + 2$ zbytek 1, přičemž $p(1) = 61$. [61–C–I–1]
4. Najděte všechny dvojice p, q reálých čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$. [56–B–I–5]

2. *Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí nerovnosti*

$$0 \leqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leqq |t - 1|.$$

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo u platí
$$\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{u}} \geqq \sqrt{u} + \sqrt{2}.$$
[Využijte toho, že dvojčlen $\sqrt{u} - \sqrt{2}$ lze vytknout jak z rozdílu prvních, tak i druhých sčítanců obou stran. Úpravy na součinový tvar může usnadnit, když předem odstraníme zlomky či užijeme vhodnou substituci, např. $s = \sqrt{u}$ či $t = \sqrt{2/u}$.]
2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo a platí
$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}).$$
[Upravte nerovnost na tvar $\frac{1}{2}(a + a + 1) > \sqrt{a(a + 1)}$.]
3. Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí
$$1 + |x| \geqq \sqrt{|x^2 - 1|}.$$
[Využijte odhad $1 + |x| \geqq \frac{1}{2}(|x - 1| + |x + 1|)$ a pak AG nerovnost.]
4. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí
$$1 + |x| + |y| + |xy| \geqq \sqrt{|x^2 - 1||y^2 - 1|}.$$
[Vysvětlete, proč hodnota $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ leží mezi hodnotami druhých mocnin levé a pravé strany dokazované nerovnosti.]

3. *Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.*

Návodné úlohy:

1. Trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ je opsána kružnice. K této kružnici jsou vedeny tečny v bodech A, B, C. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku omezeného těmito tečnami. Rozeberte různé tvary trojúhelníku ABC. [Např. pro ostroúhlý trojúhelník s různě velikými vniřními úhly mají úhly nového trojúhelníku velikosti $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$.]
2. Dokažte, že rovnoramennému lichoběžníku lze opsat kružnici a žádnému jinému lichoběžníku kružnici opsat nelze.
3. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ nechť platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [53–B–I–2]
4. Je dán lichoběžník $ABCD$ s ostrými úhly při základně AB. Na ní existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV, kde V je průsečík přímek AD a BC. [53–B–S–3]
5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnci opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]

4. *Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí*

$$a + ab + abc + ac + c = 2\,017.$$

Návodné úlohy:

1. Určete počet dělitelů čísla $2\,016$. [$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ dělitelů]
2. Určete všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro která platí $a + ab + b = 2\,017$. [$(a, b) = (1, 1\,008)$, $(a, b) = (1\,008, 1)$]
3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [59–C–S–3, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (0, 2)$]
4. Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x + yz = 2\,005, \quad y + xz = 2\,006.$$

[54–C–S–1, $(x, y, z) = (669, 668, 2)$, $(x, y, z) = (2\,005, 2\,006, 0)$]

5. *Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obě přímky, z nichž každá dělí daný lichoběžník na dvě části stejného obsahu a je přitom rovnoběžná s jeho úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že průsečík těchto dvou přímek leží na úsečce, která spojuje středy obou základen AB a CD.*

Návodné úlohy:

1. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Dokažte, že čtyři body, a to středy základen lichoběžníku, průsečík jeho úhlopříček a průsečík přímek obou ramen lichoběžníku leží na jedné přímce.
2. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), S značí průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že obsahy trojúhelníků BCS a ADS jsou stejné.
3. Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.
   a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.
   b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo $|KL| = |LM|$. [60–C–I–6]
4. Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body X a Y tak, že celý obdélník je rozdělen na dva trojúhelníky ADX, BCX o stejném obsahu a dva konvexní čtyřúhelníky $ABYX$ a $CDXY$ rovněž o stejném obsahu. Dokažte, že potom úsečka XY prochází středem obdélníku. [43–C–II–3]
5. Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF, AFD měly stejné obsahy. [58–B–I–3]

6. *Najděte největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *tak, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, která se liší o* 2 *nebo o* 5.

Návodné úlohy:

1. Je dána množina čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Najděte všechny její podmnožiny s největším možným počtem prvků, aby mezi nimi nebyla žádná dvě čísla, která se liší o 2 nebo o 5. [$\{1, 2, 5, 8, 9\}$, $\{2, 3, 6, 9, 10\}$]
2. Zjistěte, pro která přirozená čísla $n, n \geqq 2$, je možno z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n. [54–C–I–2]
3. Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ vybrat čtyři navzájem různá čísla a, b, c, d tak, že platí $ab = cd$? [54–C–S–2]
4. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. [58–C–I–5]
5. Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.
   a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
   b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. [58–C–II–3]