Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $O - X$, kde O je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více koleček než křížků a X je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více křížků než koleček.*

a) Dokažte, že pro tabulku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n+1) \times (2n+1)$ v závislosti na n.

Řešení. a) V celé části a) budeme uvažovat libovolné popsané vyplnění tabulky $2 \times n$, které je (s ohledem na sudý počet $2n$ všech políček) tvořeno n křížky a n kolečky. Nejdříve dokážeme, že v jednom z obou jejích řádků převažují křížky, právě když v tom druhém převažují kolečka. Oba řádky dohromady tak do výsledného skóre $O-X$ přispějí nulou.

Označme x_1, x_2 počty křížků v prvním, resp. druhém řádku. Podle první věty našeho řešení platí $x_1 + x_2 = n$. Předpokládejme, že $x_1 > n/2$, že tedy v prvním řádku převažují křížky. Pak $x_2 = n - x_1 < n - n/2 = n/2$, takže v druhém řádku naopak převažují kolečka. Podobně z $x_2 > n/2$ vyplývá $x_1 < n/2$. Dokázali jsme, že pokud v jednom z řádků převažují křížky, pak v tom druhém převažují kolečka. Analogicky lze ukázat, že pokud v jednom z řádků převažují kolečka, pak v tom druhém převažují křížky.

Nyní dokážeme, že všech n sloupců tabulky (každý o dvou políčkách) souhrnně do výsledného skóre $O - X$ rovněž přispívá nulou. K tomu označme x, r, o počty sloupců, které obsahují dva křížky (a žádné kolečko), resp. jeden křížek (a jedno kolečko), resp. dvě kolečka (a žádný křížek). Jak víme, tabulka obsahuje celkem n křížků i n koleček, takže platí $n = 2x + r$ a současně $n = r + 2o$. Porovnáním obdržíme rovnost $x = o$, která nám říká, že počet sloupců, v nichž převažují křížky, je roven počtu sloupců, v nichž převažují kolečka. I sloupce tak do výsledného skóre $O - X$ tabulky $2 \times n$ dohromady přispívají nulou, a řešení části a) je tak u konce.

b) Pro dané n uvažujme libovolné popsané vyplnění tabulky $(2n+1) \times (2n+1)$. Jelikož počet $2n+1$ políček v každém řádku a sloupci je liché číslo, v každém z nich bude jedna z obou značek převažovat. I počet $(2n+1)^2$ políček v celé tabulce je liché číslo, takže všech koleček je o 1 méně než všech křížků, je jich tedy $\frac{1}{2}\big((2n+1)^2 - 1\big) = 2n(n+1)$. Proto je těch řádků, ve kterých kolečka převažují (tj. jsou tam v počtu alespoň $n+1$), nejvýše $2n(n+1) : (n+1) = 2n$, tudíž naopak křížky převažují alespoň v jednom řádku. Stejně tak vysvětlíme, že kolečka převažují v nejvýše $2n$ sloupcích a křížky naopak alespoň v jednom. Dohromady to znamená, že $O \leqq 2n + 2n = 4n$ a $X \geqq 1 + 1 = 2$, takže výsledné skóre $O - X$ nemůže být větší než $4n - 2$.

Nyní dokážeme, že skóre $4n - 2$ lze (pro každé n) dosáhnout. Z úvahy předchozího odstavce vyplývá, kdy $2n(n+1)$-prvková podmnožina M políček tabulky $(2n+1) \times (2n+1)$ s vepsanými kolečky bude příkladem kýženého vyplnění: v $2n$ řádcích a $2n$ sloupcích bude po $n+1$ políčkách z M, zbylý řádek a zbylý sloupec budou bez políček z M. Zřejmě stačí jednu takovou množinu M najít, neboť vhodným vpisováním křížků a koleček lze dosáhnout toho, aby políčka s kolečky vytvořila předem danou $2n(n+1)$-prvkovou množinu M — stačí psát v jakémkoli pořadí „křížky mimo M a kolečka do M“.

Vyhovující příklad pro tabulku 7×7 (kdy $n = 3$) vidíme na obr. 1. Pro obecné n vypadá obdobná konstrukce $2n(n+1)$-prvkové množiny M takto: V posledním řádku a posledním sloupci tabulky $(2n+1)\times(2n+1)$ nevybereme do M žádné políčko; v řádcích a sloupcích zbylého čtverce $2n \times 2n$ v levém horním „rohu“ původní tabulky vybereme po $n+1$ políčkách následovně: v prvním řádku skupinu prvních $n+1$ políček, kterou v každém následujícím řádku posuneme oproti předchozímu řádku o 1 místo doprava, přitom políčka z posledního sloupce této podtabulky přesouváme do sloupce prvního. Toto pravidlo bude platit i pro přechod od posledního řádku k řádku prvnímu, takže vybráno bude $n+1$ políček nejen v každém řádku, ale i v každém sloupci (obecnější procedura je popsána v návodné úloze N1).

O	O	O	O	×	×	×
×	O	O	O	O	×	×
×	×	O	O	O	O	×
O	×	×	O	O	O	×
O	O	×	×	O	O	×
O	O	O	×	×	O	×
×	×	×	×	×	×	×

Obr. 1

Nakonec poznamenejme, že dokázaná rovnost $\max(O - X) = 4n - 2$ platí i pro $n = 0$, neboť tabulka 1×1 má jediné vyplnění (jedním křížkem) s hodnotami $O = 0$ a $X = 2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro každá dvě kladná celá čísla $k \leqq n$ lze všechna políčka tabulky $n \times n$ obarvit černě a bíle tak, aby se v každém řádku a každém sloupci nacházelo přesně k černých políček. [Skupinu k černých políček vyberme v prvním řádku tabulky libovolně. V každém dalším řádku posuneme černá políčka o 1 místo doprava ve srovnání s aktuálním řádkem, přitom políčka z posledního sloupce přesouváme do sloupce prvního. Dostaneme tak vyhovující obarvení, neboť označíme-li černá políčka v prvním řádku čísly 1 až k a zachováme-li je při posunech políček v dalších řádcích, z úvahy o počtu posunů mezi libovolnými dvěma řádky nám vyplyne, že v každém sloupci tabulky bude nakonec právě po jednom políčku s čísly 1 až k.]

D1. Určete nejvyšší možné skóre $O - X$ ze soutěžní úlohy dosažitelné pro tabulku $2n \times 2n$ v závislosti na n. [Pro $n = 1$ vyjde 0, pro $n = 2$ vyjde 2, pro $n \geqq 3$ vyjde $4n - 8$.]

2. *Dokažte, že pokud je součet dvou daných reálných čísel a, b větší než 2, má soustava nerovnic*

$$(a-1)x + b < x^2 < ax + (b-1)$$

nekonečně mnoho řešení x v oboru reálných čísel.

Řešení. Danou soustavu nerovnic zapíšeme jako

$$F(x) > 0 \wedge G(x) < 0, \tag{1}$$

kde $F(x)=x^2-(a-1)x-b$ a $G(x)=x^2-ax-b+1$. Všimněme si, že pro každé x platí $F(x)-G(x)=x-1$.

Podmínka úlohy $a+b>2$ znamená, že

$$F(1)=G(1)=2-a-b<0,$$

takže číslo 1 není řešením dané soustavy. Nerovnost $G(1)<0$ však znamená, že kvadratická rovnice $G(x)=0$ má jeden kořen větší než 1, ten označíme x_0: $G(x_0)=0$ a $x_0>1$. Pak

$$F(x_0)=F(x_0)-0=F(x_0)-G(x_0)=x_0-1>0.$$

Nyní z nerovností $F(1)<0$ a $F(x_0)>0$ plyne existence kořene x_1 rovnice $F(x)=0$ na otevřeném intervalu $(1,x_0)$: $F(x_1)=0$ a $1<x_1<x_0$. Z obecně známých vlastností kvadratické funkce (s kladným koeficientem u x^2) pak plyne, že díky nerovnostem

$$F(1)<0\wedge F(x_1)=0,\quad \text{resp.}\quad G(1)<0\wedge G(x_0)=0$$

je soustava (1) splněna pro každé x z intervalu (x_1,x_0), přitom druhá nerovnost $G(x)<0$ platí dokonce na větším intervalu $(1,x_0)$. Důkaz je hotov.

Jiné řešení. Trojčleny F a G z prvního řešení mají diskriminanty

$$D_F=(a-1)^2+4b=a^2-2a+4b+1\quad\text{a}\quad D_G=a^2-4(1-b)=a^2+4b-4, \tag{2}$$

které jsou díky podmínce $a+b>2$ (užité ve tvaru $b>2-a$) kladné:

$$\begin{aligned}D_F&=a^2-2a+4b+1>a^2-2a+4(2-a)+1=(a-3)^2\geqq 0,\\ D_G&=a^2+4b-4>a^2+4(2-a)-4=(a-2)^2\geqq 0.\end{aligned}$$

Navíc odtud plynou nerovnosti

$$\sqrt{D_F}>|a-3|\quad\text{a}\quad\sqrt{D_G}>|a-2|. \tag{3}$$

Závěr úlohy o soustavě nerovnic vyplyne z pořadí kořenů obou příslušných rovnic

$$\frac{(a-1)-\sqrt{D_F}}{2}<\frac{a-\sqrt{D_G}}{2}<\frac{(a-1)+\sqrt{D_F}}{2}<\frac{a+\sqrt{D_G}}{2},$$

které nyní dokážeme. (Ve skutečnosti první nerovnost zleva nepotřebujeme, ale vyjde nám jako vedlejší produkt při důkazu ostatních tří nerovností.) Je zřejmé, že zapsaná čtveřice nerovností je ekvivalentní s dvojicí

$$\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G}>1\quad\text{a}\quad\left|\sqrt{D_F}-\sqrt{D_G}\right|<1. \tag{4}$$

První z těchto nerovností (narozdíl od druhé) plyne z (3) okamžitě:

$$\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G}>|a-3|+|a-2|\geqq|(a-3)-(a-2)|=1$$

díky známé trojúhelníkové nerovnosti $|u\pm v|\leqq|u|+|v|$. Pro důkaz druhé nerovnosti ve (4) vynásobíme obě její strany kladným výrazem $\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G}$ a dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$|D_F-D_G|<\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G}.$$

Protože $D_F-D_G=5-2a$ podle (2), je naším posledním úkolem dokázat nerovnost

$$|5-2a|<\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G}.$$

To je snadné:

$$|5-2a|=\left|(3-a)+(2-a)\right|\leqq|3-a|+|2-a|<\sqrt{D_F}+\sqrt{D_G},$$

přitom jsme opět využili trojúhelníkovou nerovnost a odhady (3).

Návodné a doplňující úlohy:

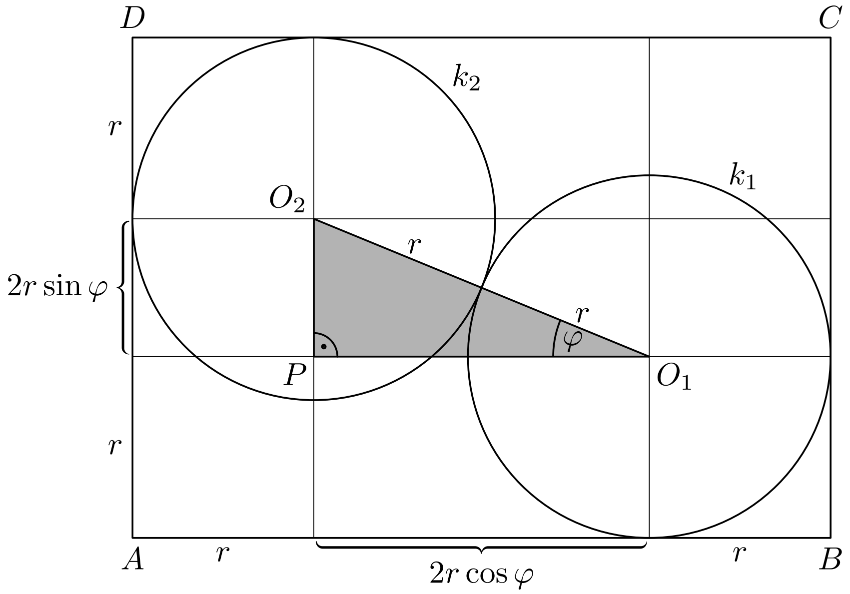
N1. Nechť $a > 0$, b a $c < 0$ jsou reálná čísla. Dokažte, že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jeden kladný a jeden záporný kořen. [Buď využijte jen nerovnosti $a > 0$ a $c < 0$, kde c je hodnota uvažovaného trojčlenu v nule, nebo zapište známé vzorce pro kořeny a přihlédněte k nerovnosti $D = b^2 - 4ac > b^2$.]

D1. Dokažte, že pokud reálná čísla a, b, c splňují $c(a+b+c) < 0$, pak rovnice $ax^2+bx+c = 0$ má řešení x v intervalu $(0, 1)$. [Označíme-li $f(x) = ax^2 + bx + c$, pak $f(0) \cdot f(1) < 0$, tedy jedna z hodnot $f(0)$, $f(1)$ je kladná a druhá je záporná.]

D2. Předpokládejme, že pro trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty a, b, c nemá rovnice $f(x) = x$ žádné řešení v oboru reálných čísel. Dokažte, že je nemá ani rovnice $f(f(x)) = x$. [Platí buď $f(x) > x$ pro všechna x, nebo $f(x) < x$ pro všechna x, proto také platí buď $f(f(x)) > f(x) > x$ pro všechna x, nebo $f(f(x)) < f(x) < x$ pro všechna x.]

3. *V rovině jsou dány dvě shodné kružnice o poloměru* 1*, které mají vnější dotyk. Uvažujme pravoúhelník obsahující obě kružnice, jehož každá strana se dotýká aspoň jedné z nich. Určete největší a nejmenší možný obsah takového pravoúhelníku.*

Řešení. Nechť k_1, k_2 jsou dvě shodné kružnice o poloměru $r = 1$ se středy po řadě O_1, O_2, jež mají vnější dotyk. Nechť $ABCD$ je pravoúhelník vyhovující podmínkám úlohy (strany AB a BC uvažovaného pravoúhelníku jsou tečnami kružnice k_1 a strany CD a DA jsou tečnami kružnice k_2). Ze zadání je patrné, že středy obou kružnic leží uvnitř hledaného pravoúhelníku. Označme dále P průsečík přímek vedených středem O_1 rovnoběžně se stranou AB a středem O_2 rovnoběžně se stranou BC (obr. 2). Označme ještě φ velikost úhlu PO_1O_2. S ohledem na symetrii zadání stačí uvažovat jen hodnoty $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi \rangle$.



Obr. 2

Pro zkoumaný obsah S pravoúhelníku $ABCD$ podle obr. 2 platí

$$S = |AB| \cdot |BC| = (2r + 2r\cos\varphi)(2r + 2r\sin\varphi) = 4(1 + \sin\varphi)(1 + \cos\varphi)$$

(dosadili jsme hodnotu $r = 1$). Nyní určíme nejmenší a největší hodnotu obsahu S s proměnným úhlem $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi \rangle$. K tomu stačí určit nejmenší a největší hodnotu výrazu (funkce)

$$V(\varphi) = (1 + \sin\varphi)(1 + \cos\varphi) \qquad \text{pro } \varphi \in \langle 0; \tfrac{1}{4}\pi \rangle.$$

Tento předpis funkce nejprve upravíme následujícím způsobem:

$$V(\varphi) = 1 + \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2} + (\sin\varphi + \cos\varphi) + \tfrac{1}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)^2.$$

Vše tedy závisí na hodnotě $u = \sin\varphi + \cos\varphi$. Ukážeme, že pro libovolné $\varphi \in \langle 0; \frac{1}{4}\pi\rangle$ je $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$. Protože pro taková φ je součet $\sin\varphi + \cos\varphi$ zřejmě kladný, můžeme místo hledání minimální a maximální hodnoty výrazu u hledat minimální a maximální hodnotu výrazu u^2 (na stejném intervalu). Platí

$$u^2 = \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi = 1 + \sin 2\varphi.$$

Odtud s ohledem na nerovnost $0 \leqq \sin 2\varphi \leqq 1$ plyne

$$1 \leqq u^2 \leqq 2, \qquad \text{tedy} \qquad 1 \leqq u \leqq \sqrt{2},$$

přičemž $u = 1$, právě když $\varphi = 0$, a $u = \sqrt{2}$, právě když $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

Protože kvadratická funkce $V(u) = \frac{1}{2} + u + \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(u+1)^2$ je na intervalu $\langle 1; \sqrt{2}\rangle$ rostoucí, platí pro každé dotyčné u nerovnosti

$$2 = V(1) \leqq V(u) \leqq V(\sqrt{2}) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2},$$

které už vedou k potřebným dohadům obsahu $S = 4V(\varphi)$:

$$8 \leqq S \leqq 6 + 4\sqrt{2}. \tag{1}$$

Nejmenší hodnota S ve vztahu (1) je přitom dosažena, právě když $\varphi = 0$, tj. v případě, kdy strany AB a CD hledaného pravoúhelníku $ABCD$ jsou tečnami obou daných kružnic k_1 a k_2 a současně strany BC a DA jsou po řadě tečnami pouze kružnic k_1 a k_2. Jedná se tedy o případ, kdy hledaným „opsaným" pravoúhelníkem (dle podmínek úlohy) je obdélník o stranách 4 a 2, jehož obsah je skutečně 8. Podobně největší hodnota S ve vztahu (1) je dosažena, právě když $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, tj. v případě, kdy hledaným „opsaným" pravoúhelníkem je čtverec $ABCD$ o obsahu $6 + 4\sqrt{2}$, na jehož úhlopříčce BD budou ležet středy obou daných kružnic.

Odpověď. Nejmenší možný obsah je 8, největší $6 + 4\sqrt{2}$.

Jiné řešení. Označme $a = |PO_1|$, $b = |PO_2|$ délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku O_1O_2P (který může případně degenerovat v jednu z úseček PO_1 či PO_2). Zároveň z Pythagorovy věty máme $a^2 + b^2 = 4r^2 = 4$ (což opět platí, i pokud je jedna z hodnot a, b nulová). Obsah S opsaného pravoúhelníku $ABCD$ pak můžeme vyjádřit (díky rozdělení úsečkami na devět menších pravoúhelníků v obr. 2) jako

$$S = 4r^2 + 2r(a+b) + ab = 4 + 2(a+b) + ab. \tag{2}$$

Využijeme-li nyní nerovnosti

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq a + b \leqq \sqrt{2(a^2+b^2)} \quad \text{a} \quad 0 \leqq ab \leqq \frac{a^2+b^2}{2},$$

jež zřejmě platí pro libovolná nezáporná čísla a a b, získáme pro obsah S podle (2) odhady

$$4 + 2\cdot 2 + 0 = 8 \leqq S \leqq 4 + 2\cdot 2\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Minimální hodnotu $S = 8$ tak dostaneme pro $ab = 0$, tedy pro obdélník, jehož dvě strany budou rovnoběžné se střednou O_1O_2, a maximální hodnotu $S = 6 + 4\sqrt{2}$ pro $a = b = \sqrt{2}$, tedy pro čtverec, jehož úhlopříčka bude obsahovat body O_1, O_2.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Do rovnostranného trojúhelníku o straně 1 jsou vepsány tři shodné kružnice, z nichž každá se vně dotýká zbylých dvou kružnic a současně se dotýká právě dvou stran tohoto trojúhelníku. Určete poloměr těchto tří kružnic. [$\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. Hledaný poloměr r splňuje $2r + 2r \operatorname{cotg} 30^\circ = 1$.]

N2. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $-\sqrt{2} \leqq \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}$. [Buď dokazujte ekvivalentní nerovnost $(\sin x + \cos x)^2 \leqq 2$, nebo využijte úpravu na výraz s hodnotou $\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.]

N3. Pro daná kladná čísla $x \neq y$ uvažujme průměry

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

(Jde o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický průměr čísel x a y.) Ze všech rozdělení čtveřice a, g, h, k na dvě dvojice r, s a t, u vyberte to rozdělení, pro které má výraz $V = rs - tu$ nejmenší kladnou hodnotu. [44–B–I–3]

D1. V obdélníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ leží vzájemně se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD, k_2 se dotýká stran AB a BC.

a) Dokažte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určete nejmenší a největší možnou hodnotu obsahu trojúhelníku AS_1S_2.

[62–A–S–1]

4. *Najděte největší přirozené číslo n takové, že hodnota součtu*

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x\rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než x.

ŘEŠENÍ. Uvažme nekonečnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel $a_n = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Tato posloupnost je zřejmě neklesající, a jelikož

$$k = \sqrt{k^2} < \sqrt{k^2+1} < \ldots < \sqrt{k^2+2k} < \sqrt{k^2+2k+1} = k+1,$$

obsahuje každé přirozené číslo k přesně $(2k+1)$-krát. Takový popis uvažované posloupnosti nám už postačí k určení zadaných součtů $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ následujícím způsobem.

Pro libovolné přirozené n označme $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, takže $n = k^2 + l$ pro vhodné $l \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$. Pak podle předchozího popisu platí

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(l+1) = 2\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i + k(l+1) = \\ &= 2\frac{(k-1)(k-1+1)(2(k-1)+1)}{6} + \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} + k(l+1) = \\ &= \frac{(k-1)k(2k-1)}{3} + \frac{k(k-1)}{2} + k(l+1) = \frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(l+1), \end{aligned}$$

kde jsme využili vztahy $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ a $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Pro libovolné $k > 6$ zůstane hodnota zlomku

$$\frac{(k-1)k(4k+1)}{6}$$

i po zkrácení šesti přirozeným číslem dělitelným některým prvočinitelem p čísla k, který samozřejmě dělí i dalšího sčítance v odvozeném vyjádření součtu s_n. Prvočíslo p tak bude dělitelem i čísla s_n, přičemž $p \leqq k < s_n$, takže číslo s_n prvočíslem nebude. Řešení dané úlohy proto stačí hledat jen mezi takovými přirozenými čísly n, pro něž $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqq 6$, tudíž ve hře zůstávají jen čísla $n < (6+1)^2 = 49$. Pro $n = 48$ dosazením do odvozeného vzorce pro s_n spočteme $s_{48} = 203$, což je číslo dělitelné sedmi. Pro $n = 47$ vyjde $s_{47} = 197$, což je prvočíslo.

Odpověď. Hledané číslo je $n = 47$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

N2. Dokažte, že $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

N3. Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

$$\lfloor \sqrt[1\,989]{n} \rfloor + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[1\,989]{\frac{n+1\,989}{1\,989}} \right\rfloor = 1\,990.$$

[38–B–II–4]

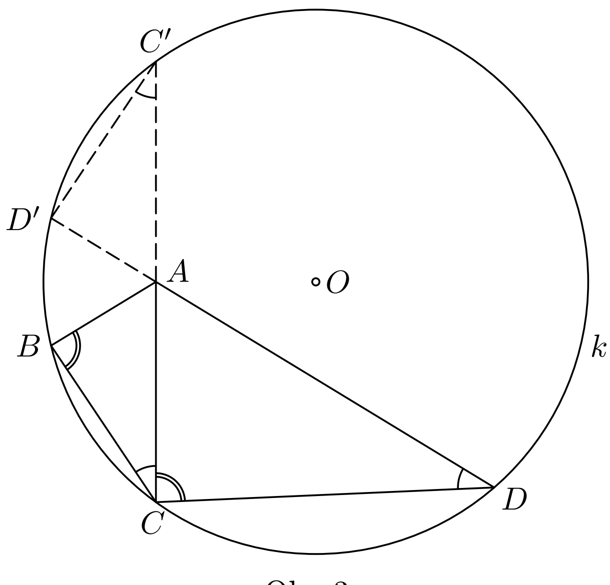
D1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \ldots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

[Tabulku $n \times n$ vyplníme čísly tak, že do políčka v a-tém řádku a b-tém sloupci vepíšeme číslo a^b a počet políček, ve kterých je číslo nepřevyšující n, spočítáme dvěma způsoby: po sloupcích a po řádcích.]

5. *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý.*

Řešení. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Podle zadání se trojúhelníky ABC a ACD shodují ve dvou vnitřních úhlech (obr. 3), takže platí i třetí rovnost $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|$. Z toho především plyne, že součet protějších úhlů při vrcholech A a C v daném čtyřúhelníku $ABCD$ je větší než $180°$, proto vrchol A musí ležet ve vnitřní oblasti kružnice k.



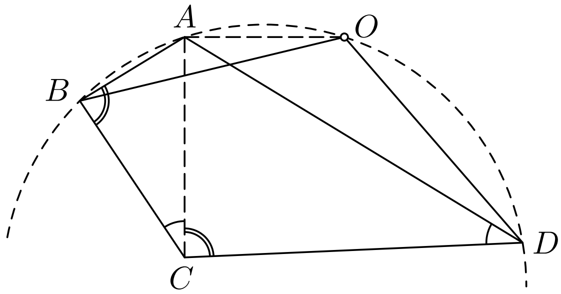
Obr. 3

Prodlužme jako na obrázku úsečky CA a DA do tětiv CC' a DD' kružnice k. Ze shodnosti obvodových úhlů nad jejím obloukem $D'BC$ máme

$$|\sphericalangle D'C'C| = |\sphericalangle D'DC| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|,$$

takže $BCC'D'$ je rovnoramenný lichoběžník nebo pravoúhelník (návodná úloha N1). Podobné trojúhelníky ABC a $AD'C'$ (připomeňme, že je také $|\sphericalangle C'AD'| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAC|$) jsou tak dokonce shodné, tudíž A je středem základny CC' rovnoramenného trojúhelníku OCC', neboli $|\sphericalangle OAC| = 90°$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Zkoumejme úlohu z pohledu trojúhelníku ABD. Protože polopřímka AC je osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, jak už víme z úvodu prvního řešení, je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| < 90°$. Proto úhel při vrcholu C konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je tupý, takže střed O kružnice k opsané trojúhelníku BCD leží stejně jako bod A v polorovině opačné k polorovině BDC (obr. 4).



Obr. 4

Z vlastností obvodového a středového úhlu tak plyne, že velikost nekonvexního úhlu BOD je dvojnásobkem velikosti konvexního úhlu BCD, takže s ohledem na rovnost

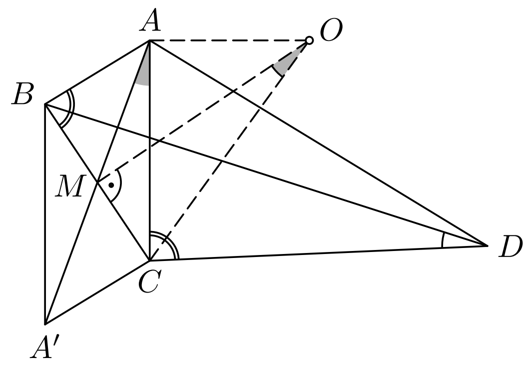
$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC|$$

a pravidlo o součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku platí

$$|\sphericalangle BOD| = 360° - 2|\sphericalangle BCD| = 360° - |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAD|.$$

Úhly BOD a BAD jsou tedy shodné, takže bod O leží na oblouku BAD kružnice opsané trojúhelníku ABD a jakožto střed kružnice opsané trojúhelníku BCD má od krajních bodů tohoto oblouku stejnou vzdálenost. Je proto jeho středem, tudíž jak známo (viz úlohu N2), leží na ose vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABD. Tvrzení úlohy tak plyne z toho, že polopřímky AC a AO jsou osami dvojice vedlejších úhlů, jež jsou vždy navzájem kolmé.

Jiné řešení. Označme M střed základny BC rovnoramenného trojúhelníku OBC (obr. 5). Jelikož $|\sphericalangle OMC| = 90°$, k důkazu rovnosti $|\sphericalangle OAC| = 90°$ stačí ukázat, že body O, A, M, C leží na kružnici (Thaletově kružnici nad průměrem OC). Z vlastnosti středových a obvodových úhlů v kružnici opsané trojúhelníku BCD plyne $|\sphericalangle MOC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle BDC|$, takže stačí dokázat shodnost úhlů BDC a MAC, neboť to dohromady zaručí, že body A a O leží na stejném kružnicovém oblouku nad tětivou CM. (Že body A a O leží v téže polorovině určené přímkou BD, už víme z předchozího řešení, kde jsme ukázali, že úhel BCD je tupý.)



Obr. 5

Označme A' obraz bodu A ve středové souměrnosti podle bodu M. Pak je $ABA'C$ rovnoběžník a kýžená shodnost úhlů vyplyne z podobnosti trojúhelníků $AA'C$ a DBC, kterou nyní dokážeme užitím věty *sus* se zaměřením na společný vrchol C. Předně platí $|\sphericalangle A'CB| = |\sphericalangle ABC|$, takže $|\sphericalangle A'CA| = |\sphericalangle BCD|$. K tomu z podobnosti trojúhelníků ABC a ACD plyne $|AC|/|CA'| = |AC|/|AB| = |DC|/|CB|$, čímž je důkaz hotov.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jestliže v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$, je $AB \parallel CD$ a $|BC| = |AD|$. Dokažte. [Ukažte, že trojúhelníky ABC a BAD jsou souměrně sdružené podle osy tětivy AB opsané kružnice.]

N2. Je dán trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k. Označme D střed oblouku BC kružnice k obsahujícího bod A. Dokažte, že v případě $A \neq D$ je přímka AD osou vnějšího úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu A. [Nechť např. $|AB| < |AC|$. Pak polopřímka AD dělí úhel CAX, kde X je bod na prodloužení strany AB za vrchol A, na dva úhly: jeden je úhel DAC shodný s úhlem DBC, druhý je vnější úhel u vrcholu A tětivového čtyřúhelníku $ABCD$, shodný s protějším vnitřním úhlem BCD.]

D1. Na stranách AB, AC různostranného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body X, Y tak, že $|BX| = |CY| = d > 0$. Dokažte, že osa úsečky XY prochází pevným bodem nezávislým na d. [Je to střed M oblouku BAC: trojúhelníky XBM a YCM jsou shodné podle věty *sus*.]

6. *Najděte největší možný počet prvků množiny* M *celých čísel, která má následující vlastnost: Z každé trojice různých čísel z* M *lze vybrat některá dvě, jejichž součet je mocninou čísla* 2 *s celočíselným exponentem.*

Řešení. Poznamenejme úvodem, že zmíněná mocnina jako celočíselný součet musí mít nezáporný exponent. Jen takové mocniny čísla 2 budeme dále uvažovat.

Dokážeme, že množina M může mít nejvýše 6 prvků, jako má například vyhovující (jak vzápětí ověříme) množina

$$\{-1, 3, 5, -2, 6, 10\}.$$

Součet libovolných dvou čísel z trojice -1, 3, 5 je totiž mocninou dvou a totéž platí pro trojici -2, 6, 10. Kdykoliv z uvedené množiny vybereme tři čísla, budou některá dvě z nich náležet jedné z obou zmíněných trojic, a tato dvě čísla tak budou mít součet rovný mocnině dvou.

Nyní připusťme, že existuje vyhovující množina s více než šesti prvky. Kdyby množina M obsahovala tři nekladná čísla, byl by součet každých dvou z nich záporný, každá mocnina dvou je však kladná. Proto množina M obsahuje nejvýše dvě nekladná čísla, a tedy alespoň pět kladných čísel. Označme x největší z nich a a, b, c, d nějaká čtyři další kladná čísla z M.

Uvažme čtyři součty $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$. Všechny jsou větší než x a menší než $2x$. V intervalu $(x,2x)$ ovšem může ležet nejvýše jedna mocnina dvou, takže nejvýše jeden z těchto čtyř součtů je roven mocnině dvou a zbylé tři (bez újmy na obecnosti $x+a$, $x+b$, $x+c$) mocninami dvou nejsou. Užitím podmínky úlohy na trojice (a,b,x), (a,c,x) a (b,c,x) tak zjistíme, že všechny tři součty $a+b$, $a+c$ a $b+c$ musejí být mocniny dvou. Bez újmy na obecnosti nechť $a=\max\{a,b,c\}$. Podobně jako výše se zaměřme na otevřený interval $(a,2a)$. V něm leží nejvýše jedna mocnina dvou, současně v něm však leží obě (různá) čísla $a+b$ i $a+c$, o nichž jsme už usoudili, že musejí být mocninami dvou. Dospěli jsme tak ke kýženému sporu.

Odpověď. Největší možný počet prvků množiny M je roven 6.

Jiné řešení. Podáme jiný důkaz, že neexistuje vyhovující množina M s alespoň sedmi prvky, který využívá základní pojmy z teorie grafů [viz např. Petr Hliněný, Základy teorie grafů, Elportál MU, Brno, URL: `is.muni.cz/elportal/?id=878389`].

Zřejmě stačí ukázat, že žádná sedmiprvková množina M celých čísel požadované vlastnosti nemá. Připusťme, že taková množina M existuje, a její prvky si představme jako vrcholy jistého grafu G. V něm dva vrcholy spojíme hranou, pokud je součet čísel, jež představují, mocninou dvou. Podmínka ze zadání úlohy říká, že v takto sestaveném grafu jsou mezi každými třemi vrcholy některé dva spojeny hranou. O grafu G o sedmi vrcholech učiníme nejdříve několik pozorování.

(1) Graf G neobsahuje kružnici délky 4.

Důkaz. Připusťme, že graf G takovou kružnici $a_1a_2a_3a_4$ obsahuje, takže pro vhodná celá nezáporná čísla α_i platí

$$a_1+a_2=2^{\alpha_1},\ a_2+a_3=2^{\alpha_2},\ a_3+a_4=2^{\alpha_3},\ a_4+a_1=2^{\alpha_4}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $a_1=\min\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ a že $a_2<a_4$. Pak číslo α_1 je menší než kterékoliv ze tří (ne nutně různých) čísel α_2, α_3 a α_4, takže nejvyšší mocnina dvou, která dělí součet $2^{\alpha_1}+2^{\alpha_3}$ je menší než nejvyšší mocnina dvou, která dělí součet $2^{\alpha_2}+2^{\alpha_4}$. To je však ve sporu s tím, že oba součty jsou rovny témuž číslu $a_1+a_2+a_3+a_4$. Graf G tedy skutečně neobsahuje kružnici délky 4.

(2) Každý vrchol grafu G má stupeň aspoň 3.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje vrchol v stupně nejvýše 2. Pak některé čtyři ze sedmi vrcholů G nejsou s v spojeny hranou; označme je a, b, c, d. Užití podmínky úlohy k trojicím (v,a,b), (v,b,c), (v,c,d), (v,d,a) implikuje existenci hran ab, bc, cd a da, které ovšem tvoří kružnici délky 4, což je ve sporu s (1).

(3) Některý vrchol grafu G má stupeň alespoň 4.

Důkaz. V každém grafu jistě platí, že součet stupňů všech vrcholů je roven dvojnásobku počtu hran. Speciálně to znamená, že toto číslo je sudé. U grafu o sedmi vrcholech tak není možné, aby každý vrchol měl stupeň přesně 3 (stupeň menší než tři je vyloučen podle (2)).

Dokázaná pozorování o našem grafu G využijeme následovně. Označme v jeden jeho vrchol stupně aspoň 4 a a, b, c, d některé čtyři jeho sousední vrcholy. Protože ty mají stupně aspoň 3, z každého z nich vycházejí aspoň dvě hrany, které nesměřují do vrcholu v. Podél každé takové hrany nakresleme šipku. Tak získáme aspoň $4\cdot 2=8$ šipek, tudíž aspoň dvě z nich směřují do téhož vrcholu různého od vrcholu v (zopakujme, že do něj nesměřuje žádná z nakreslených šipek). Koncové vrcholy takových dvou šipek spolu s vrcholem v tvoří kružnici délky 4, což je kýžený spor.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda existují tři přirozená čísla $x > y > z$ taková, že $x + y$ i $x + z$ jsou mocniny dvou. [Uvažte, kolik různých mocninou dvou může ležet v intervalu mezi čísly x a $2x$ pro dané přirozené x.]

N2. Na večírku má každý člověk lichý počet známých („znání se“ je vzájemné). Dokažte, že počet lidí na večírku je sudý. [Součet všech počtů známých jednotlivých osob je roven dvojnásobku počtu všech dvojic osob, které se znají, takže to je číslo sudé.]

D1. Každou stranu a úhlopříčku pravidelného šestiúhelníku jsme obarvili červeně nebo modře. Dokažte, že existuje trojúhelník s vrcholy ve vrcholech původního šestiúhelníku, jehož všechny tři strany mají stejnou barvu. [Důkaz tohoto prvotního výsledku tzv. Ramseyovy teorie najdete v přehledném článku J. Šimša, Ramseyova čísla a jejich uplatnění v geometrii, URL: `mfi.upol.cz/old/MFI_17_pdf/Mat_17_10.pdf`.]