67. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechny mnohočleny tvaru ax^3+bx^2+cx+d, které při dělení dvojčlenem $2x^2+1$ dávají zbytek $x+2$ a při dělení dvojčlenem x^2+2 dávají zbytek $2x+1$.*

ŘEŠENÍ. Při dělení (se zbytkem) mnohočlenu třetího stupně mnohočlenem druhého stupně je podíl roven mnohočlenu prvního stupně. Přitom jeho koeficient u první mocniny je roven podílu koeficientů u nejvyšších mocnin dělence a dělitele, zatímco absolutní člen podílu je neznámá, kterou u daných dvou dělení označíme e, resp. g. Pro hledaný mnohočlen tak má platit

$$ax^3+bx^2+cx+d=(2x^2+1)\Big(\frac{a}{2}x+e\Big)+x+2=ax^3+2ex^2+\Big(\frac{a}{2}+1\Big)x+e+2,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+2)(ax+g)+2x+1=ax^3+gx^2+(2a+2)x+2g+1.$$

Porovnáním koeficientů pravých stran předchozích dvou rovností dostaneme

$$\begin{aligned} 2e&=g,\\ \frac{a}{2}+1&=2a+2,\\ e+2&=2g+1. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a=-\frac{2}{3}$, $g=\frac{2}{3}$, $e=\frac{1}{3}$. Úloze proto vyhovuje jediný mnohočlen

$$ax^3+bx^2+cx+d=-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}.$$

NÁVODNÉ ÚLOHY:

N1. Určete podíl a zbytek při dělení mnohočlenu $2x^3+x^2-3x+5$ dvojčlenem x^2-x. Tuto skutečnost zapište ve formě rovnosti bez použití zlomků. [$2x^3+x^2-3x+5=(x^2-x)\times$ $\times(2x+3)+5$]

N2. Určete všechny kvadratické trojčleny ax^2+bx+c, které jsou beze zbytku dělitelné jak dvojčlenem $x-2$, tak dvojčlenem $x+1$. [$ax^2-ax-2a$, $a\neq 0$]

N3. Najděte všechny trojčleny $p(x)=ax^2+bx+c$, které dávají po dělení dvojčlenem $x+1$ zbytek 2 a po dělení dvojčlenem $x+2$ zbytek 1, přičemž $p(1)=61$. [61–C–I–1]

N4. Najděte všechny dvojice p,q reálých čísel takové, že mnohočlen x^2+px+q je dělitelem mnohočlenu x^4+px^2+q. [56–B–I–5]

2. *Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí nerovnosti*

$$0\leqq\frac{t^2+1}{t+1}-\sqrt{t}\leqq|t-1|.$$

ŘEŠENÍ. Obě nerovnosti vynásobíme kladným číslem $t+1$, abychom se zbavili zlomků,

$$0\leqq t^2+1-(t+1)\sqrt{t}\leqq|t-1|(t+1),$$

a pro snazší úpravy použijeme substituci $u = \sqrt{t} > 0$:

$$0 \leqq u^4 + 1 - (u^2 + 1)u \leqq |u^2 - 1|(u^2 + 1).$$

Zřejmě platí $u^4+1-(u^2+1)u = u^4-u^3-u+1 = (u^3-1)(u-1)$ a $|u^2-1|(u^2+1) = |u^4-1|$, máme tedy pro libovolné kladné u dokázat nerovnosti

$$0 \leqq (u^3 - 1)(u - 1) \leqq |u^4 - 1|.$$

Levá nerovnost nyní plyne ze známého rozkladu $u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1)$, díky kterému $(u^3 - 1)(u - 1) = (u - 1)^2(u^2 + u + 1)$ je součinem dvou nezáporných čísel. Pravou nerovnost pak dostaneme pomocí dvou zřejmých odhadů:

$$(u^3 - 1)(u - 1) \leqq |u - 1|(u^3 + 1) \leqq |u - 1|(u^3 + u^2 + u + 1) = |u^4 - 1|.$$

Tím jsou obě nerovnosti dokázány.

Jiné řešení. K důkazu obou nerovností několikrát využijeme zřejmou nerovnost $2\sqrt{t} \leqq t + 1$, jež platí pro libovolné kladné t. Pro levou nerovnost tak máme

$$\frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \geqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \frac{t + 1}{2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{2(t + 1)} = \frac{(t - 1)^2}{2(t + 1)} \geqq 0$$

a pro pravou nerovnost

$$\frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} = \frac{t^2 + 1 - (t + 1)\sqrt{t}}{t + 1} \leqq \frac{t^2 + 1 - 2\sqrt{t}\sqrt{t}}{t + 1} = \frac{|t - 1|^2}{t + 1} \leqq |t - 1|,$$

neboť $|t - 1| \leqq t + 1$ podle trojúhelníkové nerovnosti.

Návodné úlohy:

N1. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo u platí

$$\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{u}} \geqq \sqrt{u} + \sqrt{2}.$$

[Využijte toho, že dvojčlen $\sqrt{u} - \sqrt{2}$ lze vytknout jak z rozdílu prvních, tak i druhých sčítanců obou stran. Úpravy na součinový tvar může usnadnit, když předem odstraníme zlomky či užijeme vhodnou substituci, např. $s = \sqrt{u}$ či $t = \sqrt{2/u}$.]

N2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo a platí

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2(\sqrt{a + 1} - \sqrt{a}).$$

[Upravte nerovnost na tvar $\frac{1}{2}(a + a + 1) > \sqrt{a(a + 1)}$.]

N3. Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí

$$1 + |x| \geqq \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

[Využijte odhad $1 + |x| \geqq \frac{1}{2}(|x - 1| + |x + 1|)$ a pak AG nerovnost.]

N4. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla x, y platí

$$1 + |x| + |y| + |xy| \geqq \sqrt{|x^2 - 1||y^2 - 1|}.$$

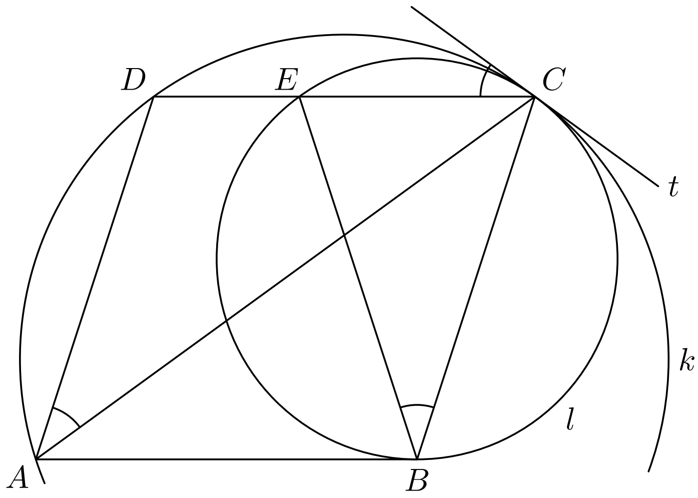
[Vysvětlete, proč hodnota $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ leží mezi hodnotami druhých mocnin levé a pravé strany dokazované nerovnosti.]

3. *Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.*

Řešení. Hledanou velikost vnitřního úhlu při vrcholu A uvažovaného kosočtverce označme α. Dále označme k kružnici opsanou trojúhelníku ACD a l kružnici opsanou trojúhelníku BCE.

Z podmínek úlohy vyplývá, že $ABED$ je rovnoramenný lichoběžník s kratší základnou ED. Je tudíž $|EB| = |DA| = |CB|$, takže trojúhelník BCE je rovnoramenný se základnou CE.

Bod C je podle zadání jediným společným bodem kružnic k a l, proto v tomto bodě existuje společná tečna t obou kružnic (obr. 1). Vzhledem k tomu, že E je vnitřním bodem strany CD (tětivy kružnice k), mají ve vrcholu C obě kružnice vnitřní dotyk. Přitom tečna t svírá jak s tětivou CD kružnice k, tak s tětivou CE kružnice l týž úsekový úhel vyznačený na obrázku. To znamená, že odpovídající obvodové úhly příslušné zmíněným tětivám kružnic k a l jsou shodné neboli $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBE|$.



Obr. 1

Protože úhlopříčka AC je osou vnitřního úhlu při vrcholu A v kosočtverci $ABCD$, je $|\sphericalangle CAD| = \frac{1}{2}\alpha$, zatímco rovnoramenný trojúhelník CEB má při základně úhly velikosti $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, takže $|\sphericalangle CBE| = 180° - 2\alpha$. Dohromady tak dostáváme pro velikost úhlu α rovnici

$$180° - 2\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha,$$

jejímž řešením je $\alpha = 72°$.

Návodné úlohy:

N1. Trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ je opsána kružnice. K této kružnici jsou vedeny tečny v bodech A, B, C. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku omezeného těmito tečnami. Rozeberte různé tvary trojúhelníku ABC. [Např. pro ostroúhlý trojúhelník s různě velikými vniřními úhly mají úhly nového trojúhelníku velikosti $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$.]

N2. Dokažte, že rovnoramennému lichoběžníku lze opsat kružnici a žádnému jinému lichoběžníku kružnici opsat nelze.

N3. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [53–B–I–2]

N4. Je dán lichoběžník $ABCD$ s ostrými úhly při základně AB. Na ní existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV, kde V je průsečík přímek AD a BC. [53–B–S–3]

N5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]

4. *Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí*

$$a + ab + abc + ac + c = 2\,017.$$

Řešení. Levou stranu dané rovnice nejprve upravíme

$$\begin{aligned} a + ab + abc + ac + c &= a(1+b) + ac(1+b) + c = a(1+b)(1+c) + c = \\ &= a(1+b)(1+c) + (1+c) - 1 = (1+c)(a(1+b)+1) - 1, \end{aligned}$$

díky čemuž dostaneme ekvivalentní rovnici

$$(1+c)(a(1+b)+1) = 2\,018.$$

Číslo 2 018 se dá napsat jako součin dvou čísel dvěma způsoby: $1 \cdot 2\,008$ nebo $2 \cdot 1\,009$. Jelikož je $1 + c \geqq 2$ a $a(1+b) + 1 \geqq 3$, může být jedině $1 + c = 2$ a $a(1+b) + 1 = 1\,009$, takže $c = 1$ a $a(1+b) = 1\,008$. V každé vyhovující trojici (a, b, c) je tak $c = 1$, a proto vlastně hledáme počet dvojic (a, b) splňujících rovnici z konce předchozí věty.

Číslo $1\,008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, které se má rovnat $a(1+b)$, má $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ různých dělitelů včetně jedničky a sebe. Protože $1 + b \geqq 2$, nemůže být $a = 1\,008$. Pro každého jiného z 29 dělitelů a čísla 1 008 dostaneme jednu dvojici řešení (a, b).

Odpověď. Hledaný počet trojic je roven 29.

Návodné úlohy:

N1. Určete počet dělitelů čísla 2 016. [$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ dělitelů]

N2. Určete všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro která platí $a + ab + b = 2\,017$. [$(a, b) = (1, 1\,008)$, $(a, b) = (1\,008, 1)$]

N3. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [59–C–S–3, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (0, 2)$]

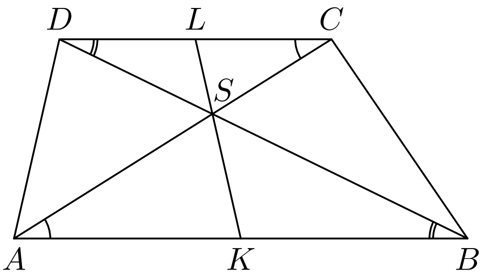
N4. Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x + yz = 2\,005, \quad y + xz = 2\,006.$$

[54–C–S–1, $(x, y, z) = (669, 668, 2)$, $(x, y, z) = (2\,005, 2\,006, 0)$]

5. *Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obě přímky, z nichž každá dělí daný lichoběžník na dvě části stejného obsahu a je přitom rovnoběžná s jeho úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že průsečík těchto dvou přímek leží na úsečce, která spojuje středy obou základen AB a CD.*

Řešení. Předně ukážeme, že průsečík S úhlopříček AC, BD leží na spojnici středu K základny AB a středu L základny CD. Ze shodnosti vyznačených střídavých úhlů na obr. 2 plyne podobnost trojúhelníků $ABS \sim CDS$ (věta *uu*), což zaručuje podobnost i jejich „půlek“, trojúhelníků AKS a CLS (podle věty *sus*, neboť v prve zmíněné podobnosti si odpovídají nejen strany AS a CS, ale i příslušné poloviny stran AB a CD). Odtud dostáváme shodnost úhlů ASK a CSL, v přímce tudíž leží nejen jejich první, ale i druhá ramena neboli $S \in KL$, jak jsme slíbili ukázat.



Obr. 2

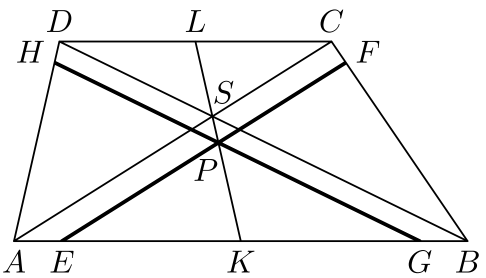
Předpokládejme, že $|AB| > |CD|$ (jinak změníme značení vrcholů). Ze srovnání stran a výšek trojúhelníků pro jejich obsahy dostáváme

$$S_{ABC} = S_{ABD} > S_{CDA} = S_{CDB}.$$

Proto uvažovaná rovnoběžka s AC protne trojúhelník ABC (a ne ACD), tedy jeho strany AB a BC v bodech, které označíme po řadě E a F. Protože

$$S_{EBF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} > \frac{1}{2} S_{ABC},$$

leží bod E na straně AB zaručeně v její „první polovině“ AK. Podobně zkoumaná rovnoběžka s BD protne strany AB a AD v bodech, které označíme G a H, přičemž bod G leží na straně AB mezi body K a B (obr. 3). Průsečík P přímek EF a GH tudíž leží v trojúhelníku ABS a podle věty *uu* platí $\triangle ABS \sim \triangle EGP$.



Obr. 3

Ještě dokážeme, že bod K je středem strany EG trojúhelníku EGP. Pak už bude totiž snadné ukázat, že bod P leží na úsečce KS.

Všimněme si, že v podobnostech $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ a $\triangle ABD \sim \triangle AGH$ mají oba trojúhelníky ABC a ABD stejný obsah. Obsahy trojúhelníků EBF a AGH jsou rovněž stejné (rovné polovině obsahu daného lichoběžníku $ABCD$), takže obě podobnosti mají stejný koeficient neboli $|EB|/|AB| = |AG|/|AB|$. Platí tak $|EB| = |AG|$ neboli $|EK| + |KB| = |AK| + |KG|$, odkud díky $|KB| = |AK|$ plyne $|EK| = |KG|$.

Bod K je tedy společným středem úseček AB i EG. Z podobnosti trojúhelníků ABS a EGP tak plyne i podobnost trojúhelníků SAK a PEK (stejnou úvahu jsme provedli pro jinou dvojici trojúhelníků už na počátku řešení). Jejím důsledkem je shodnost úhlů ASK a EPK, z níž ovšem plyne $SK \parallel PK$, takže bod P musí nutně ležet na úsečce SK. Leží tudíž i na spojnici KL, což jsme měli dokázat.

Komentář. Řešitelé budou koeficienty podobností z posledního odstavce řešení patrně vyjadřovat přes obsahy trojúhelníků vyjádřené vzorci

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{av}{2}, \quad S_{EBF} = S_{AGH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{(a+c)v}{4},$$

kde a, c a v značí délky základen a výšky daného lichoběžníku.

Anebo lze pracovat se vzdálenostmi bodů od přímek a ukázat, že platí

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(K, AS)}{d(K, BS)}.$$

(Polopřímka SK je množinou všech těch bodů úhlu ASB, které mají od jeho ramen stejný poměr vzdáleností jako bod K.) Označíme-li jako k stejný koeficient obou podobností $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ a $\triangle ABD \sim \triangle AGH$, dostaneme

$$\frac{d(P, AS)}{d(P, BS)} = \frac{d(B, AC) - d(B, EF)}{d(A, BD) - d(A, GH)} = \frac{(1-k)d(B, AC)}{(1-k)d(A, BD)} = \frac{d(B, AC)}{d(A, BD)},$$

avšak $d(B, AC) = 2d(K, AS)$ a $d(A, BD) = 2d(K, BS)$, čímž je důkaz hotov.

Návodné úlohy:

N1. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Dokažte, že čtyři body, a to středy základen lichoběžníku, průsečík jeho úhlopříček a průsečík přímek obou ramen lichoběžníku leží na jedné přímce.

N2. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), S značí průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že obsahy trojúhelníků BCS a ADS jsou stejné.

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.
   a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.
   b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo $|KL| = |LM|$. [60–C–I–6]

N4. Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body X a Y tak, že celý obdélník je rozdělen na dva trojúhelníky ADX, BCX o stejném obsahu a dva konvexní čtyřúhelníky $ABYX$ a $CDXY$ rovněž o stejném obsahu. Dokažte, že potom úsečka XY prochází středem obdélníku. [43–C–II–3]

N5. Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF, AFD měly stejné obsahy. [58–B–I–3]

6. *Najděte největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *tak, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, která se liší o* 2 *nebo o* 5.

Řešení. Nejprve ukážeme, že z libovolných sedmi po sobě jdoucích čísel, označme je

$$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6,$$

lze požadovaným způsobem vybrat nejvýše tři čísla. K tomu všech sedm čísel rozdělíme do tří množin

$$A = \{a, a+2, a+5\}, \quad B = \{a+1, a+3\}, \quad C = \{a+4, a+6\}.$$

Protože z množiny A můžeme vybrat nejvýše dvě čísla a z každé z množin B a C nejvýše po jednom čísle, stačí jen vyloučit případ, že z množiny A jsou vybrána dvě čísla (nutně $a+2$ a $a+5$) a současně z množin B a C je vybráno po jednom čísle. Tehdy kvůli číslu $a+2$ je z C nutně vybráno číslo $a+6$ a kvůli číslu $a+5$ je z B vybráno číslo $a+1$. Současný výběr čísel $a+1$, $a+6$ však možný není.

Pomocí dokázané vlastnosti nyní snadno vysvětlíme, proč ze všech 100 daných čísel od 1 do 100, která máme zadáním k dispozici, nelze požadovaným způsobem vybrat více než 44 čísel. K tomu ze všech 100 čísel sestavíme 14 disjunktních sedmic po sobě jdoucích čísel

$$\{1,2,3,4,5,6,7\},\ \{8,9,10,11,12,13,14\},\ \ldots,\ \{92,93,94,95,96,97,98\}, \qquad (1)$$

do kterých jsme nezahrnuli pouze dvě největší čísla 99 a 100. Jak jsme ukázali, z každé vypsané sedmice lze vybrat nejvýše tři čísla, proto počet všech vybraných čísel skutečně nikdy nepřevýší číslo $14 \cdot 3 + 2 = 44$.

V poslední části řešení ukážeme, že výběr 44 čísel je možný a že je přitom jediný (i když nám to zadání úlohy neukládá). Předpokládejme tedy, že máme libovolný vyhovující výběr 44 čísel. Podle předchozího odstavce víme, že mezi vybranými musí být dvojice čísel 99 a 100. Pozměníme-li sestavu 14 disjunktních sedmic na

$$\{3,4,5,6,7,8,9\},\ \{10,11,12,13,14,15,16\},\ \ldots,\ \{94,95,96,97,98,99,100\}, \qquad (2)$$

dojdeme k závěru, že mezi vybranými musí rovněž být čísla 1 a 2. Je jasné, že užitím jiných sestav 14 sedmic, složených vždy z několika prvních sedmic z (1) a několika posledních sedmic z (2), odvodíme, že mezi vybranými čísly musí být i dvojice 8 a 9, 15 a 16, ..., 92 a 93, dohromady tedy všech 15 dvojic sousedních čísel, která při dělení sedmi dávají zbytky 1 a 2.

Co lze dále usoudit o zbývajících $44 - 30 = 14$ vybraných číslech? Díky dokázané vlastnosti víme, že to musí být čísla po jednom vybraná ze 14 sedmic (1); jelikož v každé z těchto sedmic jsou určitě vybrána dvě nejmenší čísla, třetí vybrané číslo zřejmě musí být to, které je v sedmici páté nejmenší.

Dokázali jsme, že každý vyhovující výběr 44 čísel musí vypadat takto:

$$\{1,2,5\} \cup \{8,9,12\} \cup \{15,16,19\} \cup \ldots \cup \{92,93,96\} \cup \{99,100\}.$$

Že tento výběr, složený ze 14 trojic a jedné dvojice, je skutečně vyhovující, vysvětlíme snadno: dvě čísla ze stejné skupiny se liší o 1, 3 nebo 4, rozdíl každých dvou čísel ležících v sousedních skupinách je jedno z čísel 3, 4, 6, 7, 8, 10 či 11; čísla z nesousedních skupin mají rozdíly aspoň 10.

Návodné úlohy:

N1. Je dána množina čísel $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Najděte všechny její podmnožiny s největším možným počtem prvků, aby mezi nimi nebyla žádná dvě čísla, která se liší o 2 nebo o 5. [$\{1,2,5,8,9\}$, $\{2,3,6,9,10\}$]

N2. Zjistěte, pro která přirozená čísla n, $n \geqq 2$, je možno z množiny $\{1,2,\ldots,n-1\}$ vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n. [54–C–I–2]

N3. Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ vybrat čtyři navzájem různá čísla a, b, c, d tak, že platí $ab = cd$? [54–C–S–2]

N4. Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. [58–C–I–5]

N5. Z množiny $\{1,2,3,\ldots,99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.
   a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
   b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. [58–C–II–3]