Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $\left(\overline{ab}\right)^2 - \left(\overline{cd}\right)^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.*

Řešení. Hledejme nejprve řešení rovnice pro nejmenší trojmístné číslo se stejnými číslicemi, které rovnou rozložíme na prvočinitele:

$$\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 111 = 37 \cdot 3. \tag{1}$$

První závorka je kladná a součin obou závorek je kladné číslo, proto jsou obě závorky kladné. Číslo $\overline{abcd}$ je čtyřmístné, tudíž $a \geqq 1$, takže je i $\overline{ab} \geqq 10$, a tedy $\overline{ab} + \overline{cd} \geqq 10$. Jelikož 37 a 3 jsou prvočísla, máme pouze dvě možnosti v rozkladu rovnice (1): buď $\overline{ab} + \overline{cd} = 37$ a $\overline{ab} - \overline{cd} = 3$, nebo $\overline{ab} + \overline{cd} = 111$ a $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

V prvním případě dostáváme řešením soustavy $\overline{ab} + \overline{cd} = 37$, $\overline{ab} - \overline{cd} = 3$ hodnoty $\overline{ab} = 20$ a $\overline{cd} = 17$, takže $\overline{abcd} = 2\,017$. V druhém případě dostaneme obdobným způsobem $\overline{abcd} = 5\,655$.

Nyní ukážeme, že žádné číslo menší než 2 017 nemá požadovanou vlastnost. Připusťme, že takové číslo $\overline{abcd} < 2\,017$ existuje. V tom případě musí být $\overline{ab} \leqq 20$, a tedy $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 \leqq 20^2 = 400 < 444$, takže rozdíl $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je roven jednomu z čísel 111, 222 nebo 333. První možnost jsme už rozebrali úplným řešením rovnice (1), rozeberme zbylé dvě možnosti.

Rovnice

$$\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

vede (s přihlédnutím k $\overline{ab} \geqq 10$) na možnosti[1] $\left(\overline{ab} + \overline{cd}, \overline{ab} - \overline{cd}\right) \in \{(37,6), (74,3), (111,2), (222,1)\}$. Vyřešením čtyř odpovídajících soustav o dvou neznámých dostaneme

$$\left(\overline{ab}, \overline{cd}\right) \in \left\{\left(\tfrac{43}{2}, \tfrac{31}{2}\right), \left(\tfrac{77}{2}, \tfrac{71}{2}\right), \left(\tfrac{113}{2}, \tfrac{109}{2}\right), \left(\tfrac{223}{2}, \tfrac{221}{2}\right)\right\},$$

což nedává žádné celočíselné řešení.

Nakonec rovnice

$$\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)\left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = 333 = 3 \cdot 3 \cdot 37$$

vede na možnosti $\left(\overline{ab} + \overline{cd}, \overline{ab} - \overline{cd}\right) \in \{(37,9), (111,3), (333,1)\}$. Vyřešením tří odpovídajících soustav dostaneme

$$\left(\overline{ab}, \overline{cd}\right) \in \{(23,14), (57,54), (167,166)\},$$

přičemž ani v jednom případě nevychází $\overline{ab} \leqq 20$.

Odpověď. Řešením úlohy je číslo 2 017.

[1] Možnost $(\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{ab} - \overline{cd}) = 222$ lze vyloučit hned pozorováním, že obě závorky mají stejnou paritu (rozdíl mezi nimi je sudé číslo), a proto jejich součin nemůže být sudé číslo 222, které totiž není dělitelné čtyřmi.

Jiné řešení. Budeme postupovat obdobně jako v předchozím řešení, jen lépe využijeme toho, že 111 je dělitelné prvočíslem 37. Řešme tedy rovnici

$$(\overline{ab} - \overline{cd})(\overline{ab} + \overline{cd}) = 3 \cdot 37 \cdot k,$$

kde k je nějaká nenulová číslice.

Hledáme přirozená čísla l a m taková, že $0 < l < m$ a $l \cdot m = 3 \cdot 37 \cdot k$, a pro ně pak vyřešíme soustavu $\overline{ab} - \overline{cd} = l$, $\overline{ab} + \overline{cd} = m$. Přitom zřejmě platí $\overline{ab} = \frac{1}{2}(l+m)$, a protože už hledáme jen číslo $\overline{abcd}$ menší než 2 017, můžeme předpokládat, že je $\overline{ab} \leqq 20$ neboli $l + m \leqq 40$.

Poněvadž součin lm je dělitelný prvočíslem 37, musí být jedno z čísel l, m dělitelné 37. Protože je však $l + m \leqq 40$ a $l < m$, musí být $m = 37$ a $l \leqq 3$, a tudíž $k = 1$, což je případ, který jsme již rozebrali. Žádné vyhovující číslo menší než 2 017 tak neexistuje.

Návodné úlohy:

N1. Najděte všechna trojmístná čísla $\overline{abc}$ taková, že $\overline{ab} \cdot c$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [373, 376, 379, 743, 746, 749]

N2. Najděte největší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [7 412]

D1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, taková, že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je čtyřmístné číslo se čtyřmi stejnými číslicemi. [5 645, 6 734, 7 823, 8 912]

D2. Najděte všechna čtyřmístné čísla $\overline{abcd}$, takové že $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2$ je trojmístné číslo s třemi stejnými číslicemi. [2 017, 2 314, 2 611, 2 908, 3 205, 4 034, 4 331, 5 655, 5 754, 5 853, 5 952, 6 051, 7 771, 9 491]

2. *Určete největší možný počet neprázdných po dvou disjunktních množin se stejnými součty prvků, na které lze rozdělit množinu*

a) $\{1, 2, \ldots, 2017\}$,

b) $\{1, 2, \ldots, 2018\}$.

Je-li množina tvořena jedním číslem, považujeme ho za součet jejích prvků.

Řešení. Podívejme se nejprve na množiny s nejmenším možným počtem prvků; jednoprvkovou množinu můžeme zřejmě v rozdělení mít nejvýše jednu — v opačném případě by ty dvě jednoprvkové množiny neměly stejný součet prvků. Ostatní množiny jsou tedy alespoň dvouprvkové.

V části a) vezměme jako jednoprvkovou množinu tu s největším číslem, tedy $\{2017\}$. Všechny ostatní množiny pak budou alespoň dvouprvkové a měly by mít součet prvků 2 017: zbylá čísla $1, 2, \ldots, 2016$ už snadno rozdělíme do 1 008 vyhovujících množin $\{1, 2016\}$, $\{2, 2015\}$, …, $\{1008, 1009\}$ se žádoucím součtem prvků 2 017.

Podle právě popsaného postupu dovedeme rozdělit i množinu $\{1, 2, \ldots, 2018\}$ na 1 009 množin $\{1, 2018\}$, $\{2, 2017\}$, …, $\{1009, 1010\}$ se stejným součtem prvků rovným 2 019.

Nyní ještě ukážeme, proč v ani jedné z částí a) či b) nemůžeme vytvořit více než 1 009 množin. Předpokládejme, že by těch množin bylo alespoň 1 010. Protože nejvýše jedna z nich může být jednoprvková a ostatní jsou alespoň dvouprvkové, byl by počet všech jejich prvků alespoň $1 + 1009 \cdot 2 = 2019$, zatímco my máme k dispozici pouze 2 017 prvků v části a) a 2 018 prvků v části b).

Poznámka. Součet všech čísel v části a) je $1009 \cdot 2017$ a v části b) $1009 \cdot 2019$. Pokud již uhodneme, že množin má být 1 009, tak zřejmě součet prvků v jednotlivých množinách musí být 2 017 v části a) a 2 019 v části b).

Návodné úlohy:

N1. Najděte vzorec pro součet čísel $1+2+\ldots+n$. [$n(n+1)/2$]

N2. Zdůvodněte, že pokud rozdělíme 2 000 holubů do 1 001 klícek, bude nějaká klícka buď prázdná, nebo v ní bude pouze jeden holub. [Pokud by v každé klícce byli alespoň dva holubi, bylo by holubů dohromady alespoň $2\cdot 1\,001 = 2\,002$, což dává spor.]

D1. Na kolik nejvíce neprázdných množin se stejným součtem je možné rozdělit množinu $\{1,2,\ldots,n\}$? [$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, tj. $(n+1)/2$, pokud je n liché, a $n/2$, pokud je n sudé]

D2. Na kolik nejvíce neprázdných množin se součty prvků dělitelnými třemi je možné rozdělit množinu $\{1,2,\ldots,3m\}$? [Příkladem rozdělení na $2m$ množin je m dvouprvkových množin $\{3k-2, 3k-1\}$ a m jednoprvkových množin $\{3k\}$. Vysvětlíme, proč rozdělení na více než $2m$ množin neexistuje. Při libovolném vyhovujícím rozdělení můžeme od každé víceprvkové množiny obsahující násobek tří toto číslo „odtrhnout“ jako jednoprvkovou množinu, a vytvořit tak početnější rozdělení. Proto při hledání dotyčného maxima můžeme uvažovat jen rozdělení, ve kterých všech m násobků tří tvoří jednoprvkové množiny. Každé z ostatních $2m$ čísel pak leží v nějaké množině s nejméně dvěma prvky, takže víceprvkových množin je nejvýše $(3m-m):2 = m$.]

D3. Najděte vzorec pro součet čísel $1+3+5+\ldots+(2n-1)$. [n^2]

3. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, v němž D značí patu výšky z vrcholu C. V polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C uvažujme body E, F takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na úsečce CD.*

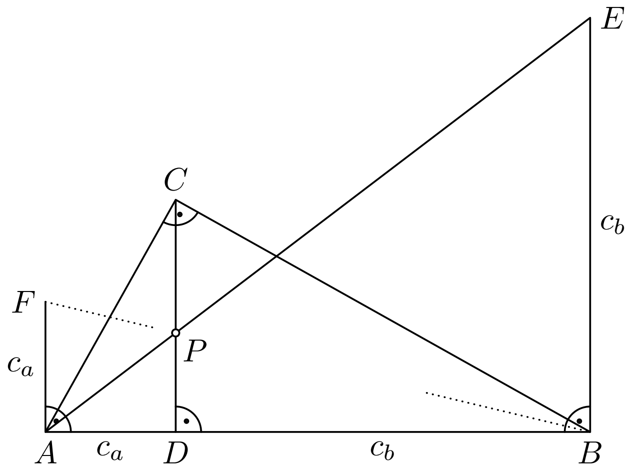
Řešení. Označme $c_a = |AF| = |AD|$ a $c_b = |BE| = |BD|$. Průsečík přímky AE s CD označme P. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABE a ADP plyne (obr. 1)

$$\frac{|DP|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \text{neboli} \quad |DP| = \frac{|AD|\cdot|BE|}{|AB|} = \frac{c_a c_b}{c_a + c_b}.$$

Označíme-li obdobně Q průsečík přímky BF s CD, vyjde z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABF a DBQ

$$|DQ| = \frac{c_a c_b}{c_a + c_b},$$

což znamená, že $|DP| = |DQ|$, a tedy $P = Q$, neboť oba body leží polopřímce DC.

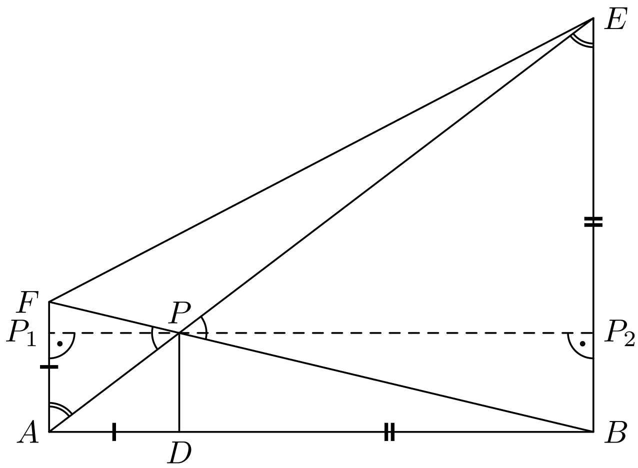


Obr. 1

Ještě dokážeme, že bod P leží *uvnitř* úsečky CD, tj. $|PD| < |CD|$. Z konstrukce bodu P plyne, že je $|PD| < |EB| = c_b$ i $|PD| < |FA| = c_a$. Navíc pro odvěsny obou podobných pravoúhlých trojúhelníků ADC a CDB zřejmě platí buď $c_a \leqq |CD| \leqq c_b$

(když pro odvěsny trojúhelníku ADC platí $c_a = |AD| \leqq |CD|$, tak platí i $|CD| \leqq \leqq |DB| = c_b$ v trojúhelníku CDB), anebo $c_b \leqq |CD| \leqq c_a$ (v opačném případě). Každopádně však je $|PD| < \min(c_a, c_b) \leqq |CD|$.

Jiné řešení. Uvažovaný čtyřúhelník $ABEF$ je zřejmě pravoúhlý lichoběžník nebo pravoúhelník. Označme P průsečík úhlopříček AE a BF a P_1, P_2 jeho kolmé průměty na strany AF, resp. BE (obr. 2). Ukážeme, že bod P leží na kolmici ke straně AB vztyčené v bodě D (patě výšky původního trojúhelníku ABC).



Obr. 2

Protože AE je příčka rovnoběžek $AF \parallel BE$, jsou trojúhelníky AFP a EBP podobné podle věty *uu*, přičemž pro jejich výšky ze společného vrcholu P díky tomu platí

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AF|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Bod P tedy dělí úsečku P_1P_2 rovnoběžnou s AB ve stejném poměru, v jakém bod D dělí úsečku AB. Proto $PD \parallel AF \parallel BE$, a tedy $PD \perp AB$, jak jsme slíbili ukázat.

Ještě si uvědomme, že díky rovnostem $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$ platí pro odvěsny pravoúhlých trojúhelníků ABF a ABE nerovnosti $|BE| < |AB|$ a $|AF| < |AB|$, takže každý z úhlů BAE i ABF je menší než $45°$.

Vrátíme-li se k zadání úlohy, vidíme, že přímky AE a BF se protínají na polopřímce DC. A protože daný trojúhelník ABC je pravoúhlý, má jeden z jeho úhlů BAC, ABC velikost alespoň $45°$ (jejich součet je $90°$). Bod P tedy musí určitě ležet uvnitř jednoho z úhlů BAC či ABC, tudíž dokonce *uvnitř* úsečky DC, což jsme chtěli dokázat.

Návodné úlohy:

N1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme D patu výšky z vrcholu C. Ukažte, že platí tzv. Eukleidovy věty $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$ a $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$.

N2. Je dán trojúhelník ABC, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na přímce CD. [Využijte podobnost pravoúhlých trojúhelníků.]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že se přímky AE a BF protínají na úsečce DG, kde G je střed úsečky CD. [Uvažte, že délka jednoho z úseků c_a, c_b je nejvýše rovna polovině délky přepony AB.]

D2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, ve kterém D označuje patu výšky z vrcholu C. V polorovině ABC uvažujme body F, E takové, že úhly EBA, FAB

jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímka EF protíná úsečku CD. [Přímka EF protne polopřímku DC ve vzdálenosti $2c_a c_b/(c_a + c_b)$ od bodu D. Nebo uvažte, že průsečík úhlopříček lichoběžníku či pravoúhelníku $BEFA$ půlí odpovídající příčku, a použijte D1.]

4. *Určete největší celé číslo n, při kterém lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 3×3 byla zapsána aspoň jedna druhá mocnina celého čísla.*

Řešení. Snadno se nám podaří požadovaným způsobem zaplnit tabulku 11×11 — stačí z 11 druhých mocnin celých čísel $1^2, 2^2, \dots, 11^2$ vybrat devět a umístit je na devět políček tabulky se souřadnicemi

$$(3,3),\ (3,6),\ (3,9),\quad (6,3),\ (6,6),\ (6,9),\quad (9,3),\ (9,6),\ (9,9)$$

a ostatními čísly zaplnit zbývající políčka jakkoli. Protože v každé části 3×3 dané tabulky je jedno z uvedených devíti polí, číslo $n = 11$ má požadovanou vlastnost.

Ukážeme, že úloze nevyhovuje žádné $n \geqq 12$. Pro libovolné $n \geqq 12$ označme k celočíselný podíl čísla n při dělení třemi se zbytkem, takže $3k \leqq n \leqq 3k + 2$ a $k \geqq 4$. V tabulce $n \times n$ tak najdeme k^2 nepřekrývajících se (disjunktních) čtverců 3×3, k dispozici však máme jen n druhých mocnin celých čísel $1^2, 2^2, \dots, n^2$, přičemž zřejmě platí

$$n \leqq 3k + 2 < 4k \leqq k^2.$$

Pro $n \geqq 12$ tak danou tabulku nesvedeme požadovaným způsobem vyplnit.

Odpověď. Hledané největší n je rovné 11.

Návodné úlohy:

N1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla zapsána alespoň jedna druhá mocnina celého čísla. [Jde to pro každé n — čtverce $1^2, 2^2, \dots, n^2$ zapíšeme na úhlopříčku.]

N2. Určete největší celé číslo n, při kterém je možné čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 2×2 byla zapsána alespoň jedna druhá mocnina celého čísla. [$n = 5$]

D1. Do čtvercové tabulky 11×11 jsme vepsali přirozená čísla $1, 2, \dots, 121$ postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou 4×4 jsme všemi možnými způsoby zakryli právě 16 políček. Kolikrát byl součet zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? [65–B–I–2]

D2. Čtvercovou tabulku 6×6 zaplníme všemi celými čísly od 1 do 36.
   a) Uveďte příklad takového zaplnění tabulky, že součet každých dvou čísel ve stejném řádku nebo sloupci je větší než 11.
   b) Ukažte, že při libovolném zaplnění tabulky se v některém řádku nebo sloupci najdou dvě čísla, jejichž součet nepřevyšuje 12. [66–C–II–2]

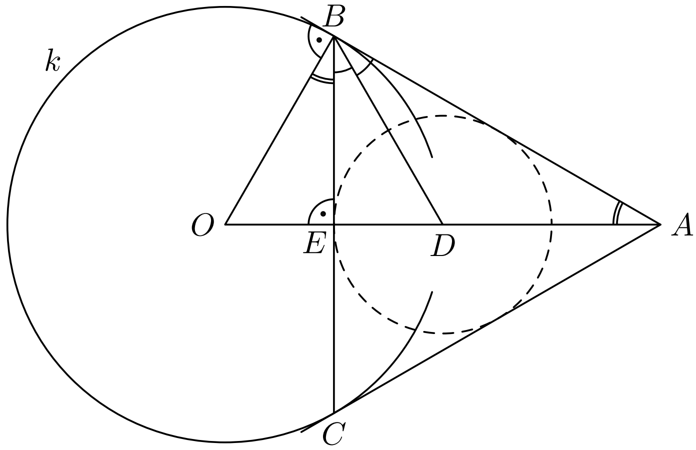
5. *Je dána kružnice $k(O, r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice. Vyjádřete její poloměr ϱ pomocí daných délek d a r.*

Řešení. Ukážeme nejprve, že střed D kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na dané kružnici k.

Ze souměrnosti tečen AB, AC kružnice k podle osy OA její tětivy BC plyne, trojúhelník ABC je rovnoramenný a střed D jeho vepsané kružnice leží na spojnici hlavního vrcholu A a středu E základny BC, přičemž DE je její poloměr (obr. 3). Protože střed D leží i na ose úhlu ABC, jsou vyznačené úhly DBA a DBE shodné. Shodné jsou i vyznačené úhly DAB a EBO, neboť oba doplňují týž úhel AOB do $90°$. Pro vnější úhel ODB trojúhelníku DAB tak platí

$$|\sphericalangle ODB| = |\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle EBO| = |\sphericalangle DBO|,$$

takže trojúhelník OBD je rovnoramenný se základnou BD, a proto $|OD| = |OB| = r$. Bod D tak skutečně leží na kružnici k, takže $|OE| = |OD| - |DE| = r - \varrho$.



Obr. 3

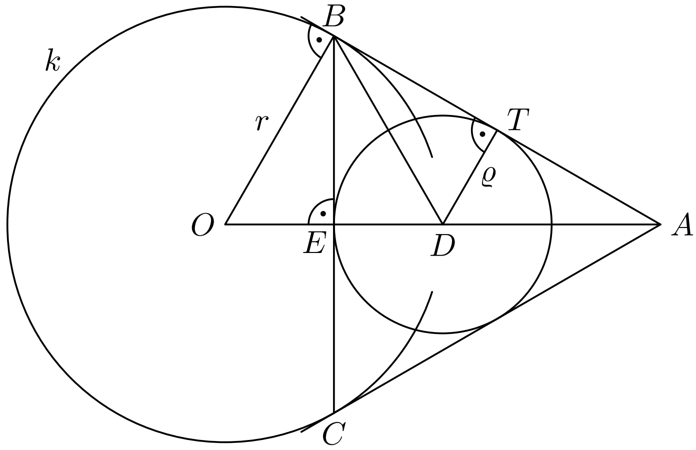
Nyní z podobnosti trojúhelníků BOE a AOB zaručené větou uu dostaneme

$$\frac{r-\varrho}{r} = \frac{|OE|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{r}{d} \quad \text{neboli} \quad \frac{r^2}{d} = r - \varrho,$$

tudíž

$$\varrho = r - \frac{r^2}{d} = \frac{rd - r^2}{d} = \frac{r(d-r)}{d}.$$

Jiné řešení. Podobně jako v prvním řešení si uvědomíme, že body A, D, O leží v přímce, a to, že bod E je patou výšky z vrcholu B v trojúhelníku ABO. Označme navíc T patu kolmice z bodu D na AB, což je zároveň bod dotyku kružnice vepsané



Obr. 4

trojúhelníku ABC (obr. 4), a protože přímky BA a BC jsou její tečny, je $|BT| = |BE|$. Délku $|BE|$ určíme z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku ABO:

$$2 \cdot S_{ABO} = |AO| \cdot |BE| = |AB| \cdot |OB|,$$

takže

$$|BT| = |BE| = \frac{|AB|r}{d}. \tag{1}$$

K výpočtu poloměru ϱ nakonec použijeme podobnost pravoúhlých trojúhelníků ABO a ATD a vyjádření (1):

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{|DT|}{|OB|} = \frac{|AT|}{|AB|} = \frac{|AB| - |BT|}{|AB|} = 1 - \frac{|BT|}{|AB|} = 1 - \frac{r}{d},$$

odkud

$$\varrho = r\Bigl(1 - \frac{r}{d}\Bigr) = \frac{r(d-r)}{d}.$$

Návodné úlohy:

N1. Je dána kružnice $k(O,r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Prochází kružnice opsaná trojúhelníku BCO bodem A? [Ano, je to Thaletova kružnice nad úsečkou AO.]

N2. Je dána kružnice $k(O,r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je připsána kružnice ke straně BC. Leží její střed na kružnici k? [Ano, označme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ a dopočítejme velikosti úhlů při osách vnějších úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech B a C.]

D1. Je dán trojúhelník ABC se středem I vepsané kružnice. Průsečík osy strany BC s obloukem opsané mu kružnice, který neobsahuje vrchol A, označme O. Dokažte, že kružnice $k(O,|OB|)$ prochází bodem I. [Nejprve zdůvodněte, proč bod O leží na polopřímce AI (která je osou úhlu BAC) a potom vyjádřete pomocí velikostí úhlu trojúhelníku ABC velikost úhlů IBO a BOI.]

D2. V rovině jsou dány kružnice k a l, které se protínají v bodech E a F. Tečna ke kružnici l sestrojená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k, který neobsahuje bod F, zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné. [66–B–II–3]

6. *Na kruhovém opevnění hradu je několik věží. Do nich se rozmístí pět černých a pět rudých rytířů (v každé věži jich může být více i různých barev) a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny přejdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Dokažte následující tvrzení:*

a) Je-li věží osm, mohou se rytíři na počátku rozmístit tak, že během každé hodiny bude v každé věži aspoň jeden rytíř.

b) Je-li věží sedm, některou hodinu zůstane aspoň jedna věž neobsazená, ať se na počátku rytíři rozmístí jakkoliv.

Řešení. V případě osmi věží si je očíslujme po směru otáčení hodinových ručiček čísly $1, 2, \ldots, 8$. Jedno z možných řešení první části úlohy je, že černí rytíři obsadí na začátku všechny věže se sudými čísly (v jedné z nich budou dva rytíři a ve zbylých třech bude po jednom rytíři) a podobným způsobem obsadí rudí rytíři věže s lichými čísly. Po každé hodině se situace změní pouze tak, že rytíři z věží se sudými čísly obsadí věže s lichými čísly a naopak. Vždy tedy zůstanou všechny věže hlídané.

Případ se sedmi věžemi je trochu náročnější. Máme pouze pět rytířů každé barvy, takže alespoň dvě věže nebudou obsazené černými a alespoň dvě věže nebudou obsazené rudými rytíři. Z pohledu černých rytířů se dvě věže neobsazené rudými rytíři (nazvěme je bílé) každou hodinu posunou o dvě pozice proti směru otáčení hodinových ručiček. Čísla 7 a 2 jsou nesoudělná, takže z tohoto pohledu se každá bílá věž vrátí na svou počáteční pozici až po sedmi hodinách. Během pěti hodin tak dvě bílé věže zaujmou alespoň šest různých pozic (každá z nich zaujme pět různých pozic, avšak zřejmě nemůže jít o dvě stejné pětice, to by se věže dostaly na původní pozici šestým posunem[2]), a tudíž se v některou hodinu alespoň jedna dostane do alespoň jednoho ze dvou míst neobsazených černými rytíři.

Návodné úlohy:

N1. Na kruhovém opevnění hradu jsou čtyři věže. Do nich se rozmístí dva černí a dva rudí rytíři a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny projdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Rozmístěte rytíře tak, aby během každé hodiny byla každá věž střežená. [Stačí rozmístit rytíře tak, aby v sousedních věžích nebyli rytíři stejné barvy.]

N2. Na kruhovém opevnění hradu jsou tři věže. Do nich se rozmístí dva černí a dva rudí rytíři a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny projdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Umíte rozmístit rytíře tak, aby během každé hodiny byla každá věž střežená? [Ne. Na počátku strážení vyberte jednu věž X, kterou nehlídají černí rytíři, a jednu věž Y, kterou nehlídají rudí rytíři. Podobně lze nestřežené věže v dalších hodinách určit posunem Y a X ve směru, resp. v protisměru chodu hodinových ručiček. Co tři hodiny tak bude platit $X = Y$.]

D1. a) Mařenka rozmístí do vrcholů pravidelného osmiúhelníku různé počty od jednoho po osm bonbonů. Petr si pak může vybrat, které tři hromádky bonbonů dá Mařence, ostatní si ponechá. Jedinou podmínkou je, že tyto tři hromádky leží ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku. Mařenka chce rozmístit bonbony tak, aby jich dostala co nejvíce, ať už Petr trojici vrcholů vybere jakkoli. Kolik jich tak Mařenka zaručeně získá?

b) Stejnou úlohu vyřešte i pro pravidelný devítiúhelník, do jehož vrcholů rozmístí Mařenka 1 až 9 bonbonů. (Mezi rovnoramenné trojúhelníky zařazujeme i trojúhelníky rovnostranné.) [66–C–I–6]

D2. Každému vrcholu pravidelného 66úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé úsečce spojující dva jeho vrcholy (straně nebo úhlopříčce) pak připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u jednotlivých úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší nezápornou hodnotu takového součtu. [66–B–I–1]

[2] Průběh posunů jedné věže lze znázornit i šipkami mezi vrcholy načrtnutého sedmiúhelníku; tím se stane očividným jak tvrzení o periodě 7 hodin celého pohybu, tak tvrzení o různosti pětic po sobě následujících pozic dvou věží s různými počátečními pozicemi.