67. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Určete všechna reálná čísla p, pro která má soustava nerovnic

$$x^2 + (p-1)x + p \leqq 0,$$
$$x^2 - (p-1)x + p \leqq 0$$

alespoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

2. V trojúhelníku ABC označme postupně S_b, S_c středy stran AC, AB. Dokažte, že pokud $|AB| < |AC|$, pak $|\sphericalangle BS_cC| < |\sphericalangle BS_bC|$.

3. Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako součet $X + O$, kde X je počet řádků obsahujících více křížků než koleček a O je počet sloupců obsahujících více koleček než křížků. Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n+1) \times$ $\times\, (2n+1)$ v závislosti na přirozeném čísle n.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 12. prosince 2017

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Vyhovuje každé $p \leqq 0$ (neboť $x = 0$ je tehdy řešením dané soustavy), zatímco žádné $p > 0$ nevyhovuje, protože sečtením obou nerovnic dostaneme vztah $2x^2 + 2p \leqq 0$, který v případě $p > 0$ zřejmě nesplňuje žádné reálné číslo x.

Jiné řešení. Grafy funkcí $f(x) = x^2 + ux + v$ a $g(x) = x^2 - ux + v$ (paraboly obrácené vzhůru) jsou souměrně sdružené podle osy y, neboť $f(x) = g(-x)$ pro každé x. Proto případné množiny řešení jednotlivých nerovnic $f(x) \leqq 0$, resp. $g(x) \leqq 0$, jimiž jsou jak známo uzavřené intervaly, jež mohou degenerovat v jednobodové množiny, jsou na číselné ose x dvě souvislé množiny souměrně sdružené podle počátku. Jejich průnik je tak neprázdný, právě když mají společný bod $x = 0$, což nastane, právě když $v = f(0) = g(0) \leqq 0$. Pro danou soustavu to je nerovnost $p \leqq 0$. (Jak je jasné i z předchozího řešení, na tvaru koeficientu $u = p - 1$ výsledek vůbec nezáleží.)

Jiné řešení. Uvažme množiny $\langle x_2, x_1 \rangle$ a $\langle x_4, x_3 \rangle$ všech řešení první, resp. druhé nerovnice, kde

$$x_{1,2} = \frac{1 - p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{a} \quad x_{3,4} = \frac{p - 1 \pm \sqrt{D}}{2},$$

přitom $D = (p-1)^2 - 4p$ a oba intervaly (alespoň jako jednoprvkové množiny) existují, právě když $D \geqq 0$ neboli $p \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{2}\rangle \cup \langle 3 + 2\sqrt{2}, \infty)$ (taková p dále nazýváme přípustná). Tyto intervaly mají neprázdný průnik, právě když platí $x_1 \geqq x_4$ a zároveň $x_3 \geqq x_2$. Nutnost této podmínky plyne z nerovností $x_1 \geqq x_0 \geqq x_2$ a $x_3 \geqq x_0 \geqq x_4$ pro bod x_0 z průniku obou intervalů. Naopak z nerovností $x_1 \geqq x_4$ a $x_3 \geqq x_2$ plyne, že pro čísla $a = \max(x_2, x_4)$ a $b = \min(x_1, x_3)$ platí $a \leqq b$, takže průnikem zkoumaných intervalů je neprázdná množina všech x, pro něž $a \leqq x \leqq b$.

Nerovnost $x_1 \geqq x_4$ platí, právě když $\sqrt{D} \geqq p-1$, což splňují právě všechna přípustná $p \leqq 1$, zatímco druhá nerovnost $x_3 \geqq x_2$ platí, právě když $\sqrt{D} \geqq 1-p$, což splňují právě všechna přípustná $p \notin (0, 1)$. Obě podmínky tak splňují právě všechna $p \leqq 0$ (každé z nich je přípustné). Řešení je hotovo.

Dodejme, že klíčové nerovnosti $\sqrt{D} \geqq p - 1$ a $\sqrt{D} \geqq 1 - p$ můžeme zapsat jedinou nerovností $\sqrt{D} \geqq |p - 1|$. Odtud s ohledem na $D = (p-1)^2 - 4p$ hned vidíme, že hledaná p jsou právě všechna nekladná čísla (pro ně zřejmě platí $D \geqq 0$, takže určování množiny všech přípustných p bylo vlastně zbytečné).

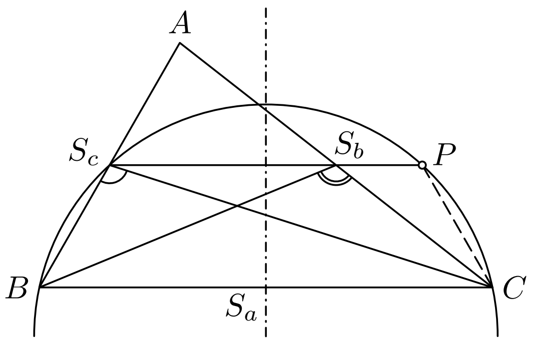
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 4 body za důkaz, že žádné $p > 0$ nevyhovuje; 2 body za důkaz, že každé $p \leqq 0$ vyhovuje. Neúplné řešení: 2 body za pozorování, že grafy dvou kvadratických funkcí na levých stranách jsou souměrně sdružené podle osy y; 1 bod za správnou odpověď (bez zdůvodnění). Při postupu z třetího řešení udělte 1 bod za výpis intervalů řešení každé z obou nerovnic a za určení hodnot p, pro něž jde o neprázdné množiny. Dále pak udělte po 2 bodech za vyřešení každé z podmínek $x_1 \geqq x_4$, $x_3 \geqq x_2$ a 1 bod za dokončení.

2. Nejdříve připomeňme známý důsledek tvrzení o kružnicovém oblouku jakožto množině bodů významné vlastnosti (tzv. ekvigonále): *Leží-li body X a Y uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou BC, pak nerovnost $|\sphericalangle BXC| < |\sphericalangle BYC|$ platí, právě když bod Y leží uvnitř kruhové úseče vymezené úsečkou BC a kružnicovým obloukem BXC.*

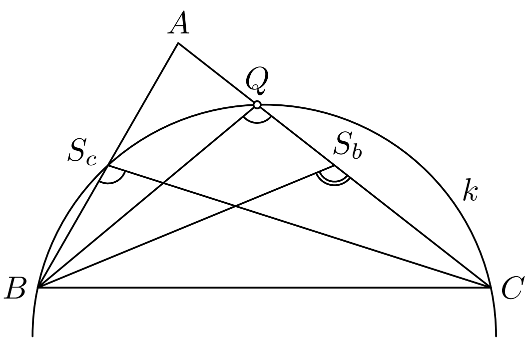
Naším úkolem je tedy ukázat, že za předpokladu $|AB| < |AC|$ leží bod S_b uvnitř úseče určené kružnicovým obloukem BS_cC.

Jak známo, střední příčka S_bS_c trojúhelníku ABC leží na přímce, která je rovnoběžná se stranou BC, a ta proto vytne na kružnicovém oblouku BS_cC takovou tětivu S_cP, která má se stranou BC společnou osu (obr. 1). Ukážeme, že bod S_b je vnitřním bodem tětivy S_cP (a ne bodem jejího prodloužení za krajní bod P). K tomu je třeba (a stačí) ověřit nerovnost $|\sphericalangle BCA| < |\sphericalangle BCP|$. Tu můžeme díky shodnosti souměrně sdružených úhlů BCP a CBA přepsat jako nerovnost $|\sphericalangle BCA| < |\sphericalangle CBA|$, která je, jak víme, dokonce ekvivalentní s předpokladem $|AB| < |AC|$ ze zadání úlohy.

Poznámka. Poznatek, že bod S_b je vnitřním bodem tětivy S_cP, lze také dokázat zjištěním, že bod S_b má od osy strany BC menší vzdálenost nežli bod S_c. Tyto dvě vzdálenosti jsou délkami prvních odvěsen dvou zřejmých pravoúhlých trojúhelníků se společnou druhou odvěsnou, která má krajní bod ve středu S_a úsečky BC, takže díky Pythagorově větě máme vlastně dokázat nerovnost $|S_aS_b| < |S_aS_c|$ pro délky obou přepon. Ty však jsou středními příčkami trojúhelníku ABC, takže platí $|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|S_aS_c| = \frac{1}{2}|AC|$, a tak se opět dostáváme k podmínce $|AB| < |AC|$ ze zadání.



Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Bod A zřejmě leží ve vnější oblasti kružnice k opsané trojúhelníku BS_cC. Má tedy ke kružnici k kladnou mocnost m danou vztahem

$$m = |AS_c| \cdot |AB| = \frac{|AB|^2}{2}.$$

Díky tomu víme, že na kružnici k rovněž leží takový bod Q polopřímky AC, který má od jejího počátku A vzdálenost určenou rovností $|AQ| \cdot |AC| = m$ (v obecném případě není vyloučeno, že $|AQ| \geqq |AC|$). Za našeho předpokladu $|AB| < |AC|$ ovšem platí

$$|AQ| = \frac{m}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{2|AC|} < \frac{|AC|^2}{2|AC|} = \frac{|AC|}{2} = |AS_b| < |AC|,$$

takže body A, Q, S_b, C leží na přímce v tomto pořadí (obr. 2). Bod S_b je tak vnitřním bodem tětivy CQ kružnice k, což podle poznatku (připomenutého úvodem předchozího řešení) už znamená, že $|\sphericalangle BS_cC| < |\sphericalangle BS_bC|$.

Jiné řešení. Označme S_a střed úsečky BC a o její osu. Jakmile si uvědomíme, že díky předpokladu $|AB| < |AC|$ má bod S_b menší vzdálenost od osy o než bod S_c, plyne tvrzení úlohy z následujícího pozorování: Pro libovolný bod X na přímce S_bS_c (kolmé k ose o) klesá velikost úhlu BXC se vzdáleností d bodu X od osy o. Místo již využité geometrické argumentace to ověříme trigonometrickým výpočtem.

Označme v vzdálenost přímky S_bS_c od strany BC, d vzdálenost bodu X od osy o a $a = |BC|$. Z kosinové věty pro trojúhelník BCX tak máme

$$a^2 = |BX|^2 + |CX|^2 - 2|BX||CX| \cos |\sphericalangle BXC|.$$

Využijeme-li navíc toho, že trojúhelník BCX má na vzdálenosti d nezávislý obsah $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2}|BX||CX|\sin|\sphericalangle BXC|$, dostaneme po snadné úpravě

$$\operatorname{cotg}|\sphericalangle BXC| = \frac{|BX|^2+|CX|^2-a^2}{4S} = \frac{(d+\frac{1}{2}a)^2+v^2+(d-\frac{1}{2}a)^2+v^2-a^2}{4S} = \frac{4d^2+4v^2-a^2}{4av}.$$

To je zjevně rostoucí funkce parametru d, zatímco funkce cotg je na intervalu $(0°, 180°)$ klesající.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za zavedení tětivy S_cP nebo CQ, další 2 body za zdůvodnění, proč je bod S_b vnitřním bodem zavedené tětivy a 1 bod za dokončení důkazu odkazem na kružnicový oblouk (či kruhovou úseč) jakožto množinu bodů potřebné vlastnosti.

Neúplné řešení: Za pouhé zdůvodnění, že bod S_b je blíže k ose strany BC nežli bod S_c, udělte 3 body. Řídce zdůvodněné postupy sestávající výhradně z platných tvrzení hodnoťte benevolentně. Oproti tomu za postup využívající (obecně neplatné) tvrzení „V lichoběžníku BCS_bS_c platí $|BS_c| < |CS_b|$, takže $|\sphericalangle BS_cC| < |\sphericalangle BS_bC|$“ udělte nejvýše 1 bod.

3. Chceme, aby křížky převažovaly v co nejvíce řádcích a kolečka v co nejvíce sloupcích.

Všech políček v tabulce je lichý počet $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$, křížků ve vyplněné tabulce je o jeden více než koleček, takže jich je $2n^2+2n+1$, zatímco koleček jen $2n^2+2n$. Je také jasné, že tabulka jakkoli vyplněná uvedenými počty křížků a koleček je výsledkem, kterého Pavel může svým postupem dosáhnout.

Nejdříve dokážeme, že křížky nemohou převažovat ve všech řádcích. Kdyby křížky převažovaly v každém řádku, muselo by jich být alespoň $(2n+1)(n+1) = 2n^2+3n+1$. Křížků v tabulce je však jen $2n^2+2n+1 = 2n(2n+1)+1$, mohou tedy převažovat nejvýše v $2n$ řádcích.

Stejným argumentem dokážeme, že kolečka mohou převažovat nejvýše v $2n$ sloupcích. Nejvyšší dosažitelné skóre je proto $2n+2n = 4n$.

Ve druhé části řešení dokážeme, že skóre $4n$ lze pro každé přirozené číslo n dosáhnout. Stačí rozmístit křížky do levých $n+1$ sloupců prvních n řádků, pravých $n+1$ sloupců dalších n řádků a prostředního políčka spodního řádku (kolečka pak umístíme do všech ostatních políček). Situaci pro $n = 3$ znázorňuje obr. 3. Snadno ověříme, že křížků je celkem $(n+1)n+(n+1)n+1 = 2n^2+2n+1$, tedy správný počet (takže i na kolečka zbývá správný počet políček), a že křížky převažují ve všech řádcích kromě posledního, zatímco kolečka převažují ve všech sloupcích kromě prostředního.

×	×	×	×	○	○	○
×	×	×	×	○	○	○
×	×	×	×	○	○	○
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	×	×	×
○	○	○	×	○	○	○

Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz, že skóre nemůže být vyšší než $4n$; 2 body za popis vyplnění, které pro každé (obecné) n vede na skóre $4n$; 1 bod za uvedení, že popsané vyplnění obsahuje správný celkový počet křížků a koleček. Neúplné řešení: 1 bod za správnou odpověď (bez zdůvodnění).