67. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Uveďte příklad mnohočlenu nejnižšího možného kladného stupně, který při dělení jak mnohočlenem $x^2 - 4$, tak mnohočlenem $x^3 - 8x + 8$ dává zbytek 1.

2. Je dán trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k. Její dotykové body na stranách AB, BC, CA označme postupně K, L, M. Nechť E, F značí po řadě body souměrně sdružené s bodem K vzhledem k bodům A a B. Průsečík přímek EM a FL označme U. Dokažte, že bod U leží na kružnici k a že přímky UK a AB jsou navzájem kolmé.

3. Číslo 2 018 jsme rozložili na součet několika přirozených čísel a jejich třetí mocniny sečetli. Jaké zbytky může tento součet dávat při dělení šesti?

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

v úterý 30. ledna 2018

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Označme P hledaný mnohočlen. Výsledky jeho dělení oběma danými mnohočleny znamenají, že pro vhodné mnohočleny A a B platí rovnosti

$$P(x) = A(x)(x^2 - 4) + 1 \quad \text{a} \quad P(x) = B(x)(x^3 - 8x + 8) + 1.$$

Přitom A a B nejsou nulové mnohočleny, neboť P musí mít podle zadání kladný stupeň, který je tak aspoň 3.

Porovnáním pravých stran dostaneme rovnost mnohočlenů

$$A(x)(x^2 - 4) = B(x)(x^3 - 8x + 8).$$

Mezi kořeny mnohočlenu na levé straně jistě patří čísla $x = 2$ a $x = -2$, z nichž pouze první je kořenem kubického činitele $x^3 - 8x + 8$ na pravé straně (to snadno zjistíme dosazením). Proto $x = -2$ musí být kořenem mnohočlenu B, který tak má stupeň aspoň jedna, tudíž hledaný mnohočlen P má stupeň aspoň 4. Navíc P bude mít stupeň čtyři, právě když odpovídající B bude tvaru $B(x) = a(x + 2)$ pro vhodné číslo $a \neq 0$. (Odpovídající $A(x) = a(x^3 - 8x + 8)/(x - 2)$ není nutné počítat, přesto je uveďme: $A(x) = a(x^2 + 2x - 4)$.)

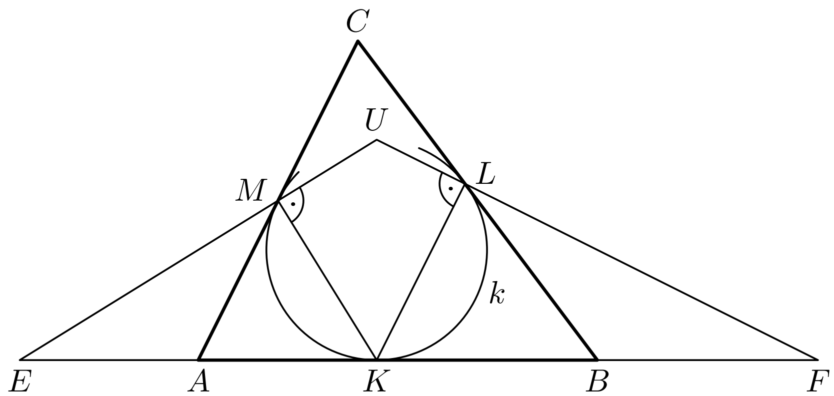
Všechny mnohočleny P vyhovující podmínkám úlohy tak jsou tvaru

$$P(x) = \underbrace{a(x + 2)}_{B(x)}(x^3 - 8x + 8) + 1 = a(x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16) + 1.$$

(Zkouška při uvedeném postupu není nutná, pro úplné řešení stačilo uvést jeden příklad, třeba volbou $a = 1$.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vytvoření potřebné rovnosti udělte 2 body. Za důkaz, že hledaný mnohočlen má stupeň aspoň 4, udělte 3 body. Za dokončení řešení dejte 1 bod.

2. Z rovnosti příslušných úseků tečen ke kružnici k plyne $|AM| = |AK|$ a $|BL| = |BK|$, proto $|AM| = |AK| = |AE|$ a $|BL| = |BK| = |BF|$ (obr. 1). To ovšem znamená, že bod A je středem kružnice opsané trojúhelníku EKM a podobně bod B středem kružnice opsané trojúhelníku KFL.



Obr. 1

Podle Thaletovy věty odtud plyne, že trojúhelníky EKM a KFL jsou oba pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech M a L. Je tudíž

$$|\sphericalangle KMU| + |\sphericalangle KLU| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

což znamená, že $MKLU$ je tětivový čtyřúhelník. Bod U tedy leží na kružnici k opsané trojúhelníku MKL.

Navíc je úsečka UK průměrem kružnice k, a protože strana AB se jí v bodě K dotýká, je průměr UK kolmý na AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz, že úhly EKM a KFL jsou pravé, dejte 3 body a další bod za odvození, že bod U leží na kružnici k. Za důkaz, že přímky UK a AB jsou navzájem kolmé, udělte 2 body.

3. Pro každé přirozené číslo n platí $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Jelikož součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti, je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti pro každé přirozené číslo n.

Je-li číslo 2 018 vyjádřeno jako součet několika přirozených čísel,

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k,$$

můžeme pro odpovídající součet T třetích mocnin psát

$$\begin{aligned} T &= x_1^3 + \ldots + x_k^3 = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + (x_1 + \ldots + x_k) = \\ &= (x_1^3 - x_1) + \ldots + (x_k^3 - x_k) + 2\,018 = \\ &= 6t + 6 \cdot 336 + 2, \end{aligned}$$

takže číslo T dává bez ohledu na způsob rozkladu čísla 2 018 při dělení šesti vždy zbytek 2.

Poznámka. Řešení lze podat stručněji, ovládáme-li základy číselných kongruencí. Víme pak, že tvrzení o stejném zbytku čísel n^3 a n při dělení šesti lze dokázat pro obecné n tak, že je numericky ověříme pouze pro $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poté už je jasné, že i čísla

$$2\,018 = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{a} \quad x_1^3 + \ldots + x_k^3$$

dávají při dělení šesti stejný zbytek. A číslo 2 018 dává při dělení šesti zbytek 2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za jakékoli zdůvodnění, že přirozené číslo a jeho třetí mocnina dávají při dělení šesti stejný zbytek, udělte 2 body. Za zdůvodnění, že čísla $x_1 + \ldots + x_k$ a $x_1^3 + \ldots + x_k^3$ dávají při dělení šesti stejný zbytek, udělte další 2 body. Za dokončení řešení udělte zbylé 2 body.