67. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo.

2. Zkoumejme, zda lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé čtvercové části 2×2 byl zapsán aspoň jeden násobek pěti.
   a) Dokažte, že pro žádné sudé n to nejde.
   b) Najděte největší liché n, pro něž to jde.

3. Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu A, v němž D značí patu výšky z vrcholu C. Na kolmicích k AB, které procházejí body A a B, sestrojme v polorovině ABC po řadě body E a F, pro něž platí $|AE| = |AD|$ a $|BF| = |BD|$. Označme konečně P a Q průsečíky přímek AF a BE s přímkou CD. Dokažte, že D je středem úsečky PQ.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 30. ledna 2018

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Hledáme největší mezi čísly $\overline{abc}$, pro něž všechna tři čísla $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ i $\overline{bc}$ jsou prvočísla. Dvojmístná prvočísla $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ jsou lichá, proto jejich poslední číslice musejí být liché. Navíc mezi nimi nemůže být ani číslice 5, jinak by uvedená dvojmístná čísla byla dělitelná pěti. Stačí tedy dále zkoumat pouze číslice b a c z množiny $\{1, 3, 7, 9\}$.

Číslici a chceme co největší, budeme tedy postupně procházet možnosti počínaje hodnotou $a = 9$, dokud nenajdeme řešení.

Pro $a = 9$ jsou čísla $91 = 7 \cdot 13$, $93 = 3 \cdot 31$, $99 = 3 \cdot 33$ složená, jedině 97 je prvočíslo, a tak zbývá jediná možnost $b = c = 7$. V tomto případě je však číslo $\overline{bc} = 77 = 7 \cdot 11$ složené. Číslicí 9 tedy hledané číslo začínat nemůže.

Podobně pro $a = 8$ vyloučíme možnosti $b, c \in \{1, 7\}$, protože $81 = 3 \cdot 27$ a $87 = 3 \cdot 29$. Zbývá tak pouze možnost $b, c \in \{3, 9\}$. V tom případě je však číslo $\overline{bc}$ dělitelné třemi.

Pokud hledané číslo začíná číslicí $a = 7$, nemůže být $b = 7$ ani $c = 7$, zato čísla 71, 73 i 79 jsou vesměs prvočísla. Ze zbylých kandidátů 1, 3, 9 na číslice b, c lze vytvořit čtyři dvojmístná prvočísla 31, 19, 13, 11 a největší z nich je číslo 31. Vidíme tedy, že číslo 731 splňuje podmínky úlohy a žádné větší takové trojmístné číslo neexistuje.

Hledané největší trojmístné číslo je 731.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyloučení možnosti $b, c \in \{2, 4, 6, 8\}$ dejte 1 bod, za vyloučení $b = 5$ a $c = 5$ dejte další bod. Za vyloučení každé z možností $a = 9$ a $a = 8$ udělte po 1 bodu. Poslední 2 body udělte za rozebrání možnosti $a = 7$ a nalezení správného řešení. Systematické prohledávání možností od největšího trojmístného čísla bez nalezení správného řešení ohodnoťte nejvýše 4 body.

2. Pro sudé $n = 2k$ rozdělme tabulku na nepřekrývající se čtvercové části 2×2 — těch bude přesně k^2 a v každé z nich má být zapsán jiný násobek pěti. K tomu ovšem potřebujeme k^2 násobků pěti, z nichž nejmenší jsou čísla 5, 10, …, $5k^2$, přinejmenším poslední uvedené však mezi přirozenými čísly od 1 do $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ nenajdeme. Tím je část a) dokázána.

Pro liché $n = 2k + 1$ vybereme v tabulce podobným způsobem k^2 nepřekrývajících se čtvercových částí 2×2 — například tak, že vynecháme její poslední řádek a poslední sloupec. Abychom mohli tabulku vyplnit požadovaným způsobem, musí opět platit $5k^2 \leqq n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ neboli $k^2 \leqq 4k + 1$. Poslední nerovnost ovšem nemůže platit pro $k \geqq 5$, neboť pro takové k je naopak $k^2 \geqq 5k > 4k + 1$.

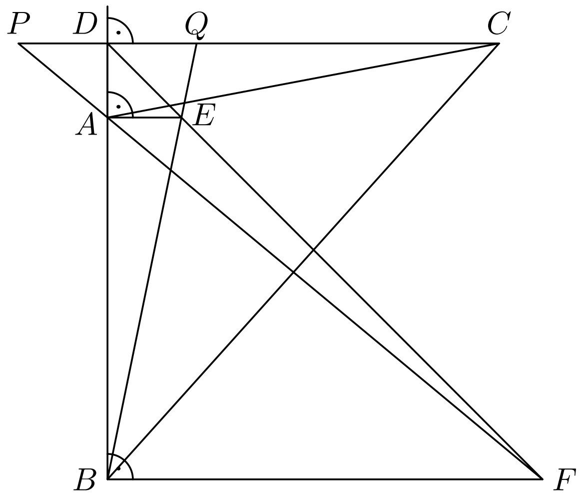
Největší liché n, pro něž máme mezi čísly od 1 do n^2 dostatek násobků pěti, je tak $n = 9$. Všech 16 násobků pěti vepíšeme do jednotlivých částí 2×2, přičemž zbývající čísla pak vepíšeme do prázdných políček libovolně:

	5		10		15		20	
	25		30		35		40	
	45		50		55		60	
	65		57		75		80	

Hledané největší liché n, pro něž lze tabulku vyplnit požadovaným způsobem, je rovno devíti.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za myšlenku rozdělit tabulku na k^2 nepřekrývajících se částí 2×2 dejte 3 body, za dokončení důkazu části a) pak 1 bod, za odvození podmínky $n \leqq 9$ v části b) další bod a bod za uvedení příkladu vyplnění.

3. Protože trojúhelník ABC má při vrcholu A tupý úhel, leží bod D vně úsečky AB. Z konstrukce jednotlivých bodů tak plyne, že body P a Q leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB (obr. 1).



Obr. 1

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $ADP \sim ABF$ plyne

$$\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|AB|} \quad \text{a odtud} \quad |DP| = \frac{|AD| \cdot |BD|}{|AB|},$$

přičemž jsme využili rovnost $|BF| = |BD|$ ze zadání.

Podobně z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $DBQ \sim ABE$ plyne

$$\frac{|DQ|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \text{a odtud} \quad |DQ| = \frac{|AD| \cdot |BD|}{|AB|},$$

přičemž jsme využili druhou rovnost $|AE| = |AD|$ ze zadání.

Vidíme tak, že délky úseček DP a DQ se rovnají, a protože bod D leží uvnitř úsečky PQ, je jejím středem, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Zapsání podobnosti trojúhelníků $ADP \sim ABE$ a $DBQ \sim ABF$ ohodnoťte po jednom bodu, další 2 body dejte za vyjádření délek úseček $|DP| = |AD| \cdot |BF|/|AB|$ a $|DQ| = |BD| \cdot |AE|/|AB|$ a poslední 2 body udělte za správné využití rovností ze zadání.