67. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $X - O$, kde X je součet druhých mocnin počtů křížků v jednotlivých řádcích a sloupcích a O je součet druhých mocnin počtů koleček v jednotlivých řádcích a sloupcích. Určete všechny možné hodnoty skóre dosažitelné pro tabulku 67×67.

2. Je dána polokružnice k nad průměrem PQ. Na ní je sestrojena tětiva BC pevné délky d, jejíž krajní body jsou různé od bodů P, Q. Paprsek vyslaný z bodu B se od průměru PQ odrazí do bodu C v takovém bodě A, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle QAC|$. Dokažte, že velikost úhlu BAC nezávisí na poloze tětivy BC na polokružnici k.

3. Jsou dána dvě různá kladná reálná čísla a, b. Uvažujme rovnici

$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor bx + a \rfloor,$$

kde $\lfloor y \rfloor$ označuje největší celé číslo, které nepřevyšuje y. Dokažte, že existuje interval délky alespoň

$$\frac{1}{\max\{a, b\}},$$

jehož všechny body jsou řešeními dané rovnice.
(Délkou intervalu s krajními body u, v rozumíme číslo $|u - v|$ bez ohledu na to, který z krajních bodů do intervalu patří.)

4. Rozhodněte, zda existují kladná celá čísla n a k taková, že

$$\frac{n}{11^k - n}$$

je druhou mocninou celého čísla.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 16. ledna 2018

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme $n = 67$ rozměr tabulky. Jelikož číslo n je liché, je křížků v tabulce celkem $k = \frac{1}{2}(n^2+1)$. Příspěvek řádku obsahujícího a křížků a $n-a$ koleček do celkového skóre je $a^2 - (n-a)^2 = 2na - n^2$.

Protože součet všech hodnot a pro jednotlivé řádky je roven výše určenému číslu k, sčítáním přes všech n řádků získáváme, že jejich celkový příspěvek je

$$2nk - n \cdot n^2 = \frac{n^2+1}{2} \cdot 2n - n^3 = n.$$

Totéž platí i pro sloupce, takže výsledné skóre je vždy rovno $n + n = 2n = 134$.

Jiné řešení. Uvažme tabulku $n \times n$ vyplněnou zcela libovolně kolečky a křížky. Dokážeme, že přepsáním libovolného kolečka na křížek se skóre zvýší o $4n$, a jelikož pro tabulku vyplněnou samými kolečky je skóre rovno $-2n^3$ a Pavlem vyplněná tabulka obsahuje $\frac{1}{2}(n^2+1)$ křížků, bude výsledné skóre vždy rovno $-2n^3 + 4n \cdot \frac{1}{2}(n^2+1) = 2n$.

Označme přepisované políčko P a předpokládejme, že ve sloupci a řádku obsahujícím P se nachází s, resp. r křížků. Příspěvek tohoto řádku a sloupce se tak změní z původního

$$A = r^2 - (n-r)^2 + s^2 - (n-s)^2 = 2n(r+s) - 2n^2$$

na

$$B = (r+1)^2 - (n-r-1)^2 + (s+1)^2 - (n-s-1)^2 = 2n(r+1+s+1) - 2n^2,$$

zatímco příspěvek ostatních řádků a sloupců se nezmění. Jelikož $B - A = 4n$, jsme hotovi.

Jiné řešení. Vyplní-li Pavel tabulku 67×67 tak, že se křížky nacházejí právě ve všech políčkách prvních 33 řádků a v prvních 34 políčkách 34. řádku, snadno vyjádříme

$$X = 33 \cdot 67^2 + 34^2 + 34 \cdot 34^2 + 33 \cdot 33^2$$

a

$$O = 33^2 + 33 \cdot 67^2 + 34 \cdot 33^2 + 33 \cdot 34^2.$$

Pro takto vyplněnou tabulku nám vyjde $X - O = 2 \cdot (34^2 - 33^2) = 134$.

Nyní dokážeme, že hodnota skóre nezávisí na tom, ve kterých políčkách křížky jsou. K tomu stačí dokázat, že hodnota skóre se nezmění, prohodíme-li křížek s kolečkem ležícím v témže řádku nebo v témže sloupci. Opakovaným prováděním takových operací lze totiž z každé Pavlem vyplněné tabulky získat tabulku vyplněnou jako ve výše popsaném případě.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že prohazované znaky leží v témže řádku, a označme s_x, s_o sloupce, v nichž leží prohazovaný křížek, resp. kolečko. Konečně označme a, b počet (ostatních) křížků ve sloupcích s_x, s_o. Příspěvek sloupce s_x do výsledného skóre se změní z původního $A_1 = (a+1)^2 - (n-a-1)^2$ na nové $A_2 = a^2 - (n-a)^2$, příspěvek sloupce s_o se změní z původního $B_1 = b^2 - (n-b)^2$ na nové $B_2 = (b+1)^2 - (n-b-1)^2$ a příspěvky ostatních sloupců a řádků se nezmění. Výsledné skóre se tak změní o hodnotu

$$A_2 - A_1 + B_2 - B_1 = -2a - 1 - 2(n-a) + 1 + 2b + 1 + 2(n-b) - 1 = -2n + 2n = 0.$$

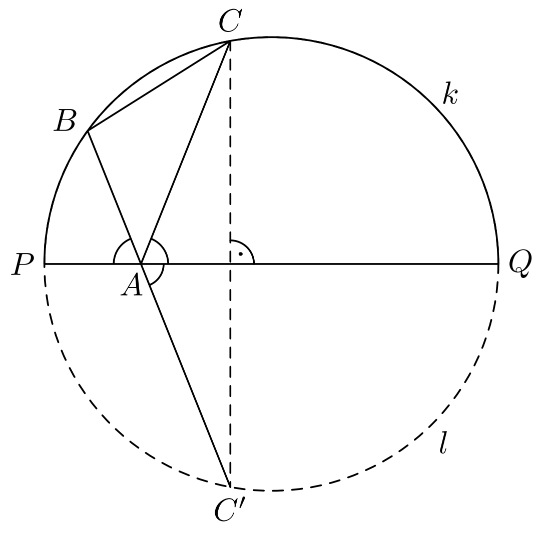
Tím jsme hotovi.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Neúplné řešení: Po 1 bodu udělte za tvrzení, že skóre bude vždy 134 (bez zdůvodnění), a za popsaný výpočet skóre pro nějaké konkrétní vyplnění tabulky. U třetího řešení nestrhávejte body za absenci formálního důkazu, že z jedné vyplněné tabulky lze postupným prohazováním křížků a koleček dostat každou jinou vyplněnou tabulku.

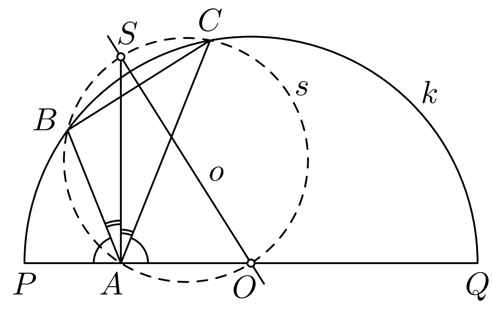
2. Označme l polokružnici, jež je obrazem polokružnice k v osové souměrnosti podle průměru PQ, a sestrojme bod C' jako obraz bodu C v této osové souměrnosti. Bod C' zřejmě leží na l. Z vlastností osové souměrnosti dále plyne $|\sphericalangle QAC'| = |\sphericalangle QAC|$, a protože $|\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle PAB|$, leží body B, A, C' v přímce (obr. 1). Zároveň je trojúhelník $C'CA$ rovnoramenný, takže pro jeho vnější úhel BAC platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle AC'C| + |\sphericalangle ACC'| = 2|\sphericalangle BC'C|.$$

Tětiva BC kružnice $k \cup l$ má pevnou délku, proto má i příslušný obvodový úhel $BC'C$ konstantní velikost. Hodnota $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle BC'C|$ tak nezávisí na poloze tětivy BC.



Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Označme O střed průměru PQ polokružnice k. Dokážeme, že bod O vždy leží na kružnici s opsané trojúhelníku ABC (obr. 2). A protože celý průměr PQ leží v polorovině určené tětivou BC, vyplyne z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BC rovnost $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BOC|$, což je hodnota, jež na poloze tětivy BC nezávisí. Tím bude tvrzení úlohy dokázáno.

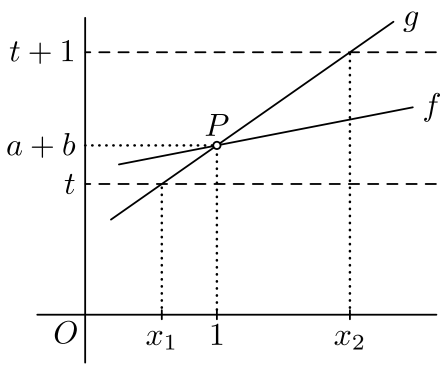
Uvědomme si, že bod O leží na ose o úsečky BC, na níž leží i střed S toho oblouku BC kružnice s, který neprochází bodem A. Přímka OS tak obsahuje průměr kružnice s s jedním krajním bodem S. Podle Thaletovy věty bude jeho druhým krajním bodem právě bod O přímky PQ (a náš důkaz tak bude hotov), když ověříme, že $SA \perp PQ$.

Podle zadání jsou shodné úhly BAP a CAQ, díky shodnosti tětiv SB a SC kružnice s jsou však shodné i úhly BAS a CAS, takže jsou shodné i úhly SAP a SAQ, jsou to tedy skutečně dva pravé úhly, jak jsme slíbili ověřit.

Poznámka. Dodejme, že bod A na PQ je rovností ze zadání jednoznačně určen. Stačí proto ukázat, že bod A lze najít jako průsečík kružnice s opsané (rovnoramennému) trojúhelníku OBC s přímkou PQ: Pokud je BC rovnoběžné s PQ, je zřejmě $A = O$; v opačném případě existuje další průsečík $X \neq O$ kružnice s s přímkou PQ a pro ten platí, že v něm vztyčená kolmice k PQ prochází středem S oblouku BC, je tudíž osou úhlu BXC, takže vskutku $X = A$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho při prvním postupu udělte 1 bod za popis konstrukce pomocného bodu C' (resp. B'), 1 bod za důkaz, že bod C' leží na přímce AB, 2 body za vyjádření $|\sphericalangle BAC|$ pomocí $|\sphericalangle BC'C|$ nebo $|\sphericalangle BOC|$, 2 body za dokončení důkazu. U druhého postupu udělte 4 body za důkaz toho, že bod O vždy leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC či bod A na kružnici opsané trojúhelníku OBC a 2 body za dokončení důkazu.

3. Uvažujme lineární funkce $f(x) = ax + b$ a $g(x) = bx + a$. Jelikož čísla a, b jsou kladná a různá, jsou jejich grafy dvě různé přímky s kladnou směrnicí a obě funkce f a g jsou rostoucí. A protože $f(1) = g(1) = a + b$, je bod $P[1, a + b]$ průsečíkem obou přímek (obr. 3).



Obr. 3

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $b > a$, takže přímka určená funkcí g je „strmější“ než přímka určená funkcí f. Jinými slovy pro $x < 1$ je $f(x) > g(x)$, zatímco pro $x > 1$ je $f(x) < g(x)$. To ostatně plyne i z algebraického vyjádření

$$f(x) - g(x) = (ax + b) - (bx + a) = (b - a)(1 - x).$$

Označme $t = \lfloor a + b \rfloor$ a nalezněme čísla $x_1 \leqq 1 < x_2$ taková, že $g(x_1) = t$ a $g(x_2) = t + 1$ (tj. $x_1 = (t - a)/b$ a $x_2 = (t + 1 - a)/b$). Tvrdíme, že interval $\langle x_1, x_2)$, který obsahuje číslo 1, má všechny požadované vlastnosti.

Nejprve ukážeme, že pro každé $x \in \langle x_1, x_2)$ platí

$$t \leqq f(x) < t + 1 \quad \text{a} \quad t \leqq g(x) < t + 1, \tag{1}$$

což povede k závěru, že x je řešením zadané rovnice, neboť obě její strany pak budou rovny číslu t.

Skutečně, pro každé takové x platí buď $x_1 \leqq x \leqq 1$, nebo $1 < x < x_2$. Díky nerovnostem mezi hodnotami f a g v prvním případě platí

$$t = g(x_1) \leqq g(x) \leqq f(x) \leqq f(1) = a + b < t + 1,$$

ve druhém případě pak je

$$t \leqq a + b = f(1) < f(x) < g(x) < g(x_2) = t + 1,$$

takže (1) platí v obou případech. Všechna čísla z intervalu $\langle x_1, x_2)$ jsou tak řešením zadané rovnice. Navíc z rovností

$$1 = t + 1 - t = bx_2 + a - (bx_1 + a) = b(x_2 - x_1)$$

plyne

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{b} = \frac{1}{\max\{a, b\}},$$

tudíž interval $\langle x_1, x_2)$ má i požadovanou délku.

Z našeho výsledku plyne, že podmínkám úlohy vyhovuje i interval (x_1, x_2).

Jiné řešení. Pro libovolně zvolené celé číslo t má rovnice $\lfloor ax + b \rfloor = t$ za řešení právě ta x, pro něž platí $t \leqq ax + b < t + 1$. Taková x díky podmínce $a > 0$ tvoří interval

$$I_1 = \Big\langle \frac{t-b}{a}, \frac{t-b+1}{a} \Big),$$

který má délku $1/a$. Podobně všechna řešení rovnice $\lfloor bx + a \rfloor = t$ tvoří interval

$$I_2 = \Big\langle \frac{t-a}{b}, \frac{t-a+1}{b} \Big)$$

délky $1/b$. V případě $a < b$ tak stačí dokázat existenci celého t, pro něž má interval $I_1 \cap I_2$ stejnou délku $1/b$ jako kratší interval I_2. To nastane, právě když bude platit $I_2 \subset I_1$, což lze vyjádřit dvojicí nerovností mezi krajními body obou intervalů ve tvaru

$$\frac{t-b}{a} \leqq \frac{t-a}{b} \quad \text{a} \quad \frac{t-a+1}{b} \leqq \frac{t-b+1}{a}.$$

Snadno se přesvědčíme, že za našeho předpokladu $0 < a < b$ obě nerovnosti platí, právě když

$$a + b - 1 \leqq t \leqq a + b.$$

Vždy tedy vyhovuje $t = \lfloor a + b \rfloor$; je-li číslo $a + b$ celé, vyhovuje i $t = a + b - 1$. S ohledem na symetrii platí předchozí věta i v opačné situaci, kdy $a > b$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, v případě drobných nedostatků strhněte 1 bod. Při hodnocení částečných řešení udělte následující body (částečné body podle prvního a druhého řešení se nesčítají!).

Při postupu podle prvního řešení 1 bod za konstatování, že vyhovuje $x = 1$ neboli že se uvažované přímky protínají v bodě $[1, a + b]$, 1 bod za rozhodnutí, že budeme hledat jen ta x, pro něž se obě strany rovnice rovnají hodnotě $t = \lfloor a + b \rfloor$, 1 bod za výpočet krajních bodů x_1, x_2 u strmější funkce pomocí a, b a t (postačuje pro jeden z případů $a < b$, $a > b$), další 1 bod za důkaz, že interval s těmito krajními body má požadovanou délku $1/\max(a, b)$ a 2 body za algebraické nebo grafické ověření, že na tomto (polouzavřeném) intervalu se obě strany rovnice rovnají. V případě postupu podle druhého řešení udělte 2 body za nalezení intervalů, ve kterých jsou funkce $\lfloor ax + b \rfloor$ a $\lfloor bx + a \rfloor$ rovny konstantě t, 1 bod za důkaz, že kratší z nich mají požadovanou délku $1/\max(a, b)$, 1 bod za správný zápis inkluze a 2 body za dopočet $t = \lfloor a + b \rfloor$.

Pokud řešitel nebude postupovat v dostatečné obecnosti vzhledem k reálným parametrům a a b, udělte nejvýše 1 bod za (úplný) důkaz pro jednu konkrétní dvojici (a, b) a nejvýše 3 body za (úplný) důkaz pro nekonečně mnoho dvojic (a, b) (například pro dvojice $a = 1$, $b = m > 1$, kde m je libovolné přirozené číslo).

4. Taková čísla neexistují. Předpokládejme naopak, že n a k jsou kladná celá čísla taková, že

$$\frac{n}{11^k - n} = a^2$$

pro nějaké kladné celé číslo a. Po snadné úpravě dostáváme

$$n(a^2 + 1) = a^2 \cdot 11^k.$$

Jelikož čísla a^2 a $a^2 + 1$ jsou pro každé $a \geqq 1$ nesoudělná, musí být $a^2 + 1$ dělitelem čísla 11^k, a to dělitelem netriviálním, neboť $a^2 + 1 > 1$. To znamená, že $a^2 + 1 = 11^t$ pro nějaké $1 \leqq t \leqq k$ neboli číslo a^2 musí při dělení 11 dávat zbytek 10. Snadno však ověříme, že žádná druhá mocnina celého čísla zbytek 10 při dělení 11 nedává: to samozřejmě stačí ověřit pouze pro čísla $0, 1, \ldots, 10$. Jejich druhé mocniny dávají postupně zbytky $0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$, čímž jsme dospěli ke slíbenému sporu.

Žádná taková čísla n a k neexistují.

Poznámka. Jelikož $(11 - r)^2 = 11 \cdot (11 - 2r) + r^2$, dávají druhé mocniny čísel r a $11 - r$ při dělení 11 stejné zbytky, takže poslední tvrzení stačilo ověřit jen pro čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz, že stačí řešit rovnici $a^2 + 1 = 11^t$ pro $t \geqq 1$; 2 body za důkaz, že žádná druhá mocnina celého čísla nedává zbytek 10 při dělení 11; 1 bod za dokončení důkazu. Za pouhé uvedení správné odpovědi (bez jakéhokoliv zdůvodnění) neudělujte žádný bod.