67. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané, S_a, S_b po řadě středy stran BC, AC a P patu výšky na stranu AB. Vyjádřete podíl $|OS_a|/|OS_b|$ pomocí $a = |BC|$, $b = |CA|$ a $k = |AP|/|BP|$.

2. Najděte všechna kladná reálná čísla t taková, že pro libovolné nezáporné reálné číslo x platí nerovnost

$$\frac{t}{x+2} + \frac{x}{t(x+1)} \leqq 1.$$

3. Pro která n je možné vyplnit tabulku $n \times n$ čísly od 1 do n^2 tak, aby součet čísel v každém řádku i v každém sloupci byl dělitelný sedmi?

4. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, 2\,018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu?

Krajské kolo kategorie B se koná

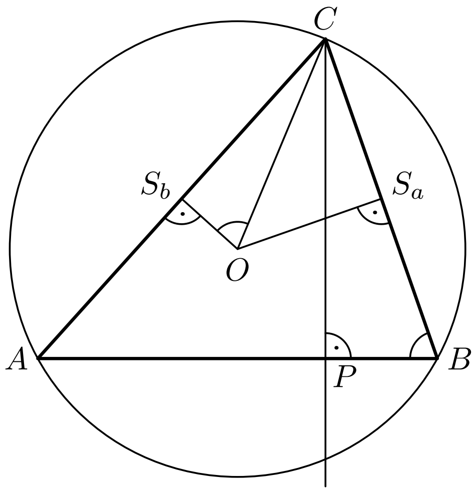
v úterý 10. dubna 2018

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice součtu získaných bodů (vyšší než 7 bodů) k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

67. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Trojúhelníky S_bOC a PBC jsou podobné, neboť jsou oba pravoúhlé a velikost obvodového úhlu PBC příslušného tětivě AC je rovna polovině velikosti středového úhlu AOC příslušného téže tětivě (obr. 1).



Obr. 1

Ze stejného důvodu jsou podobné i trojúhelníky S_aOC a PAC. Platí proto

$$\frac{|OS_a|}{|OC|} = \frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|AP|}{b}, \qquad \frac{|OS_b|}{|OC|} = \frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|BP|}{a},$$

odkud

$$\frac{|OS_a|}{|OS_b|} = \frac{|AP| \cdot |OC|}{b} \cdot \frac{a}{|BP| \cdot |OC|} = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{a}{b}. = k \cdot \frac{a}{b}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, přitom každý z následujících kroků oceňte jedním bodem: 1. jedna podobnost (s důkazem), 2. druhá podobnost (s důkazem), 3. správný poměr v první podobnosti, 4. správný poměr v druhé podobnosti, 5. spojení do rovnosti (eliminace $|OC|$), 6. správný závěr (vyjádření pomocí a, b, k).

2. Díky podmínkám $x \geqq 0$ a $t > 0$ můžeme danou nerovnost ekvivalentně upravit na kvadratickou nerovnost vzhledem k x:

$$\begin{aligned}
\frac{t}{x+2} + \frac{x}{t(x+1)} &\leqq 1, \\
t^2(x+1) + x(x+2) &\leqq t(x+1)(x+2), \\
x^2 + (t^2+2)x + t^2 &\leqq tx^2 + 3tx + 2t, \\
0 &\leqq (t-1)x^2 + (3t - t^2 - 2)x + 2t - t^2, \\
0 &\leqq (t-1)x^2 + (2-t)(t-1)x + t(2-t). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme $t(2-t) \geqq 0$, a tak pro hledaná $t > 0$ nutně $t \leqq 2$.

Má-li nerovnost (1) platit pro všechna nezáporná čísla x, nemůže být koeficient u x^2 záporný, jinak bychom pro dostatečně velké nezáporné x jistě získali na pravé straně (1) zápornou hodnotu. Musí proto být $t - 1 \geqq 0$ neboli $t \geqq 1$.

Naopak pro libovolné $t \in \langle 1, 2 \rangle$ budou zřejmě koeficienty všech tří členů kvadratického trojčlenu (v proměnné x) na pravé straně nerovnosti (1) nezáporné, takže daná nerovnost bude platit pro libovolné nezáporné reálné číslo x.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Za důkaz, že $t \geqq 1$, dejte 2 body (lze nahlédnout například sporem: pro $t < 1$ po úpravě na $x^2 \leqq (t-2)x + t(t-2)/(1-t)$ je vidět, že parabola nemůže ležet pod žádnou přímkou).

2 body za důkaz, že $t \leqq 2$. To lze dokázat opět sporem i tak, že za předpokladu $t > 2$ upravíme na $x^2 \geqq (t-2)x + t(t-2)/(t-1)$, takže graf přímky, kterou představuje výraz na pravé straně, protne osu y v kladném bodě, což odporuje poloze vrcholu paraboly $y = x^2$.

2 body za důkaz, že nerovnici opravdu vyhovuje interval $\langle 1, 2 \rangle$ a formulaci závěru.

1 bod strhněte, je-li opomenuta zmínka o ekvivalentních úpravách, pokud je nutná.

Za pouhé ověření, že tvrzení funguje pro konečně mnoho t z intervalu $\langle 1, 2 \rangle$, žádné body nedávejte.

3. Součet všech čísel v tabulce je $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$. Má-li být tento součet dělitelný sedmi, musí být sedmi dělitelné buď samo n, nebo číslo n^2+1. Jak se však snadno přesvědčíme, číslo n^2+1 není násobkem sedmi pro žádné přirozené n. (To samozřejmě stačí ověřit jen pro n rovná všem možným zbytkům $0, 1, \ldots, 6$ při dělení sedmi.)

Je-li naopak n násobek sedmi, lze tabulku skutečně vyplnit tak, aby požadavky úlohy byly splněny. Stačí do ní vepsat čísla od 1 do n^2 postupně podle velikosti po jednotlivých řádcích. V i-tém řádku ($1 \leqq i \leqq n$) tak budou čísla

$$7(i-1)+1,\ 7(i-1)+2,\ \ldots,\ 7(i-1)+n,$$

jejichž součet je dělitelný sedmi, neboť součet $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ je zřejmě násobkem sedmi.

Podobně v j-tém sloupci ($1 \leqq j \leqq n$) budou čísla

$$j,\ n+j,\ \ldots,\ (n-1)n+j,$$

jejichž součet je $nj + n(1 + 2 + \ldots + n - 1)$, což je násobek čísla n, a tedy i sedmi.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení nutné podmínky $7 \mid n$ udělte 3 body, za ověření, že pro tato n lze tabulku vyplnit, udělte 3 body. Podrobněji: 1 bod za pozorování, že součet čísel tabulky musí být dělitelný 7, 1 bod za výpočet tohoto součtu jako $\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$, 1 bod za korektní důkaz, že $7 \mid n$, 1 bod za popis vyhovujícího vyplnění, 1 bod za důkaz, že řádky mají součet dělitelný 7, 1 bod za důkaz, že sloupce mají součet dělitelný 7.

A dílčí body: 1 bod dejte za hypotézu, že odpovědí je $7 \mid n$. Za důkaz, že pro konečně mnoho n to udělat nejde, ani za nalezení vyplnění pro $n = 7$ (a nic víc) žádné body nedávejte.

4. Výběr 505 čísel $1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 2\,017 \in \mathsf{M}$, jež dávají při dělení čtyřmi zbytek 1, má zřejmě požadovanou vlastnost, neboť rozdíl každých dvou vybraných čísel je násobkem čtyř, tedy číslo složené. (Protože 4 je nejmenší složené číslo, není možný podobně pravidelný výběr o větším počtu čísel.)

Ukážeme, že více čísel s požadovanou vlastností z dané množiny vybrat nelze, ať postupujeme jakkoli. K tomu nejprve ověříme klíčové tvrzení, že totiž z každé osmice po sobě jdoucích čísel lze vybrat nejvýše dvě čísla.

Dokážeme nejprve, že pokud vybereme nějaké číslo n, ze sedmi následujících čísel $n+1, n+2, \ldots, n+7$ lze vybrat nejvýše jedno. Skutečně, pak už nelze vybrat žádné z čísel $n+2$, $n+3$, $n+5$, $n+7$. A ze zbývající trojice $n+1$, $n+4$, $n+6$ lze vybrat jen jedno číslo, neboť jejich rozdíly jsou prvočísla 2, 3 a 5. Tím je tvrzení o sedmici čísel, jež následují za kterýmkoli vybraným číslem n, dokázáno. Z něj je už zřejmé, že *žádná* osmice po sobě jdoucích čísel nemůže obsahovat více než dvě vybraná čísla, jak jsme slíbili ověřit.

Danou množinu M můžeme rozdělit na množinu $\{1, 2, \ldots, 10\}$ a 251 následujících osmic. Přitom z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ lze vybrat nejvýše tři vyhovující čísla. Kdybychom z první desítky

$$\{1, 2, \ldots, 10\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, \ldots, 10\} = \{1, 2, \ldots, 8\} \cup \{9, 10\}$$

vybrali vyhovujícím způsobem čtyři čísla, podle dokázané vlastnosti každé osmice po sobě jdoucích čísel bychom museli vybrat jak obě čísla 1 a 2, tak obě čísla 9 a 10, avšak $9 - 2$ je prvočíslo. Z množiny M tak lze vybrat nejvýše $2 \cdot 251 + 3 = 505$ čísel.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod za myšlenku, že z osmice po sobě jdoucích čísel se dají vybrat nejvýše dvě a 1 bod za korektní důkaz této myšlenky. 1 bod za rozdělení čísel správným způsobem na disjunktní osmice a „zbytek“. 1 bod za správné odvození, že z takového rozdělení plyne, že můžeme vybrat nejvýše 505 čísel. 1 bod za konstrukci samotné vyhovující množiny a 1 bod za zdůvodnění, že sestrojená množina úloze vyhovuje.

V případě částečného řešení dejte 1 bod za konstrukci příkladu 505 čísel, která vyhovují a ještě bod navíc za důkaz, že k nim nejde přidat žádné další číslo.