67. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Přerov, 18.–21. března 2018

1. *Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro kladné celé číslo $k \geqq 3$ řekneme, že společnost je k-dobrá, pokud lze každou k-tici lidí ze společnosti rozesadit kolem kruhového stolu tak, že se každí dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá.* (Josef Tkadlec)

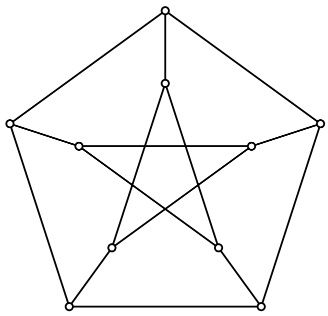
Řešení. Uvažme libovolnou sedmici lidí ze skupiny, jež je 6-dobrá, a označme je A až G. Stačí dokázat, že tuto sedmici lze požadovaným způsobem rozesadit kolem kruhového stolu. Omezme se na vztahy mezi $A, \ldots, G$. Nejdříve dokážeme, že každý z nich má alespoň tři přátele. Bez újmy na obecnosti to ukážeme pro G.

Dle předpokladu lze kolem kruhového stolu rozesadit šestici $B, \ldots, G$, takže G má jistě alespoň dva přátele. Bez újmy na obecnosti je jedním z nich F. Dle předpokladu lze ovšem kolem stolu rozesadit i šestici $A, \ldots, E, G$ (bez F), takže i v ní má G alespoň dva přátele, tedy spolu s F má G alespoň tři přátele.

To, že každý člen sedmice má alespoň tři přátele, ovšem znamená, že alespoň jeden člen má nejméně čtyři přátele, protože kdyby každý ze sedmi členů měl právě tři přátele, existovalo by v sedmici celkem přesně $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3$ spřátelených dvojic, což zřejmě není možné.

Nyní (opět bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že člen s alespoň čtyřmi přáteli je G. Dle předpokladu lze kolem kruhového stolu rozesadit šestici $A, \ldots, F$. V takovém rozesazení musejí někteří dva ze čtyř přátel G sedět vedle sebe. Člena G pak můžeme posadit mezi ně a jsme hotovi.

Poznámka. Tvrzení, že je-li společnost k-dobrá, pak je i $(k+1)$-dobrá, platí právě pro $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 16\}$.[1] Protipříkladem pro $k = 9$ je například takzvaný *Petersenův graf* (obr. 1).



Obr. 1

2. *Reálná čísla x, y, z jsou zvolena tak, že čísla*

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

jsou délkami stran (nedegenerovaného) trojúhelníku. Určete všechny možné hodnoty výrazu $xy + yz + zx$. (Michal Rolínek)

Řešení. Při volbě $x = y = z = t > 0$ jsou zmíněná čísla délkami stran rovnostranného trojúhelníku a $xy+yz+zx = 3t^2$, takže výraz $xy+yz+zx$ může nabývat všech kladných hodnot. Podobně pro $x = y = t > 0$ a $z = -2t$ mají tři zlomky postupně hodnoty $\frac{1}{3}t^{-2}$, $\frac{1}{3}t^{-2}$, $\frac{1}{6}t^{-2}$, což jsou kladná čísla odpovídající délkám stran rovnoramenného trojúhelníku (platí $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$). Přitom $xy + yz + zx = -3t^2$, takže výraz $xy + yz + zx$ může nabývat i všech záporných hodnot.

[1] Viz Wikipedie: Hypohamiltonian graph.

Dále dokážeme, že nuly výraz $xy+yz+zx$ nabývat nemůže. Předpokládejme opak. Čísla x, y, z jsou nutně po dvou různá: pokud by platilo například $x=y$, byl by jmenovatel prvního zlomku roven $|x^2+2yz|=|xy+(yz+xz)|=0$, což není možné.

Zkoumejme zlomky bez absolutních hodnot. Odečtením $xy+yz+zx=0$ od každého jmenovatele s následnou úpravou na součin obdržíme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2zx}+\frac{1}{z^2+2xy}=\\&\quad=\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}=\\&\quad=\frac{(z-y)+(x-z)+(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0.\end{aligned}$$

Z toho ovšem vyplývá, že v původní trojici zlomků (s absolutními hodnotami) byla hodnota jednoho z nich součtem hodnot zbylých dvou. To je ve sporu s předpokladem, že tyto hodnoty jsou délkami stran nedegenerovaného trojúhelníku (nemohou totiž splňovat trojúhelníkovou nerovnost!).

Odpověď. Možnými hodnotami výrazu jsou všechna reálná čísla kromě 0.

---

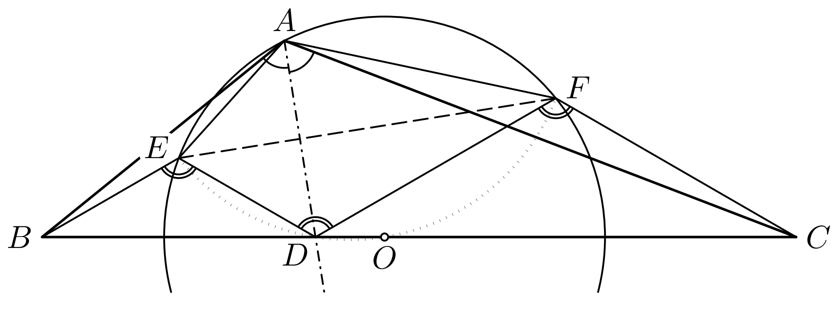
3. *Je dán trojúhelník ABC. Osa úhlu při vrcholu A protíná stranu BC v bodě D. Označme E, F středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABD, ACD. Jakou velikost může mít úhel BAC, leží-li střed kružnice opsané trojúhelníku AEF na přímce BC?*

(Patrik Bak)

Řešení. Označme α velikost zkoumaného úhlu BAC a O střed kružnice opsané trojúhelníku AEF. Jelikož úhly BAD a CAD jsou ostré, leží oba body E a F v polorovině BCA, a tudíž pro odpovídající středové a obvodové úhly příslušné tětivám BD a CD kružnic opsaných trojúhelníkům ABD a ACD (obr. 2) platí

$$|\sphericalangle BED|=2|\sphericalangle BAD|=\alpha=2|\sphericalangle DAC|=|\sphericalangle DFC|.$$

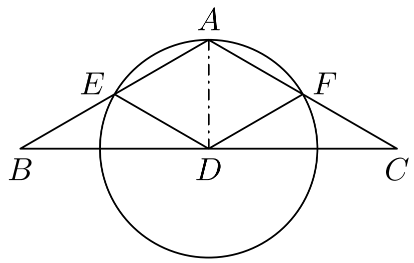
Rovnoramenné trojúhelníky BED a DFC jsou tedy podobné (*sus*), takže $|\sphericalangle EDB|= =|\sphericalangle FDC|$. A protože jejich základny leží na téže přímce, je dokonce $|\sphericalangle EDF|=\alpha$. Přímka BC je proto osou vnějšího úhlu u vrcholu D v trojúhelníku EDF. Ta, jak známo, prochází středem oblouku EDF kružnice opsané trojúhelníku EDF, tedy bodem, který leží na ose její tětivy EF. Tím bodem je ovšem bod O, který jako střed kružnice opsané trojúhelníku AEF leží na ose strany EF (a dle předpokladu i na BC). Speciálně tak platí $|\sphericalangle FOE|=|\sphericalangle FDE|=\alpha$.



Obr. 2

Jelikož $AEDF$ je deltoid, je i $|\sphericalangle EAF|=\alpha$. Ze souměrnosti je zřejmé, že přímka EF odděluje body A a O (jak už víme, leží bod O na oblouku EDF, který je souměrně sdružený s obloukem EAF). Podle věty o obvodovém a středovém úhlu je proto velikost nekonvexního úhlu EOF rovna dvojnásobku velikosti konvexního úhlu EAF. Tím pádem $360° - \alpha = 2|\sphericalangle EAF| = 2\alpha$, z čehož okamžitě plyne $\alpha = 120°$.

Naopak se snadno přesvědčíme, že aspoň jeden takový trojúhelník existuje (obr. 3): například pro $|AB| = |AC|$ a $\alpha = 120°$ jsou E, F středy stran AB, AC, trojúhelníky DAE a DAF jsou rovnostranné a střed kružnice opsané trojúhelníku AEF skutečně leží na straně BC (splývá totiž se středem D strany BC).



Obr. 3

Odpověď. Jediná možná velikost úhlu BAC je $120°$.

---

4. *Uvažujme libovolnou trojici celých čísel a, b a c, která jsou délkami stran trojúhelníku, nemají společného dělitele většího než 1 a pro něž jsou hodnoty všech tří zlomků*

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

celočíselné. Dokažte, že součin jmenovatelů těchto tří zlomků nebo jeho dvojnásobek je druhou mocninou celého čísla. (Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $z = a+b-c$, $x = b+c-a$, $y = c+a-b$ kladné jmenovatele jednotlivých zlomků. Pak $a = \frac{1}{2}(y+z)$, $b = \frac{1}{2}(z+x)$, $c = \frac{1}{2}(x+y)$ a

$$a^2+b^2-c^2 = \tfrac{1}{4}\big((y+z)^2+(z+x)^2-(x+y)^2\big) = \tfrac{1}{2}\big(z(z+x+y)-xy\big),$$

takže dle předpokladu musí platit $z \mid xy$ a podobně $y \mid xz$ a $x \mid yz$.

Nyní stačí dokázat, že pro každé liché prvočíslo p je exponent jeho nejvyšší mocniny, která ještě dělí součin xyz, sudý. Pokud bude i exponent nejvyšší mocniny dvojky, která ještě dělí součin xyz, sudý, bude xyz druhou mocninou celého čísla. V opačném případě bude druhou mocninou jeho dvojnásobek $2xyz$.

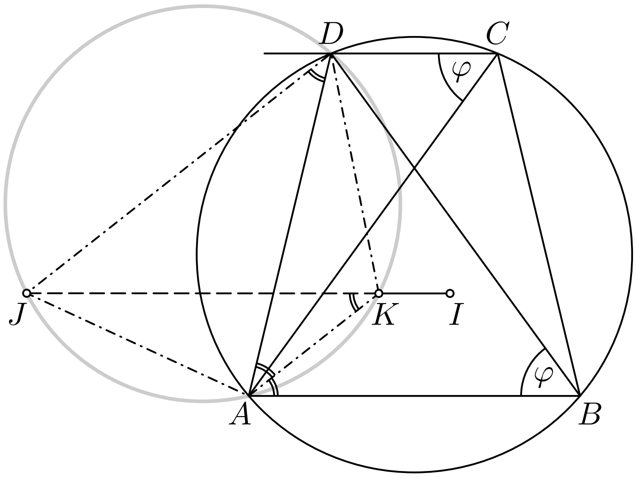
Pro liché prvočíslo p označme nejvyšší mocniny, v nichž p dělí čísla x, y, z, jako p^α, p^β, p^γ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\min\{\alpha,\beta,\gamma\} = \gamma$. Kdyby bylo $\gamma > 0$, dělilo by p každé z čísel x, y, z, a tedy i každé z čísel a, b, c, což je ve sporu s jejich předpokládanou nesoudělností. Tím pádem $\gamma = 0$.

Z dělitelnosti $x \mid yz$ pak plyne $\alpha \leqq \beta$ a podobně z $y \mid xz$ plyne $\beta \leqq \alpha$, tedy $\beta = \alpha$, takže v součinu xyz se p skutečně vyskytuje v sudé mocnině $\alpha+\beta+\gamma = 2\alpha$.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

5. *Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a J střed kružnice připsané straně AD trojúhelníku ACD. Dokažte, že přímky IJ a AB jsou rovnoběžné.* (Patrik Bak)

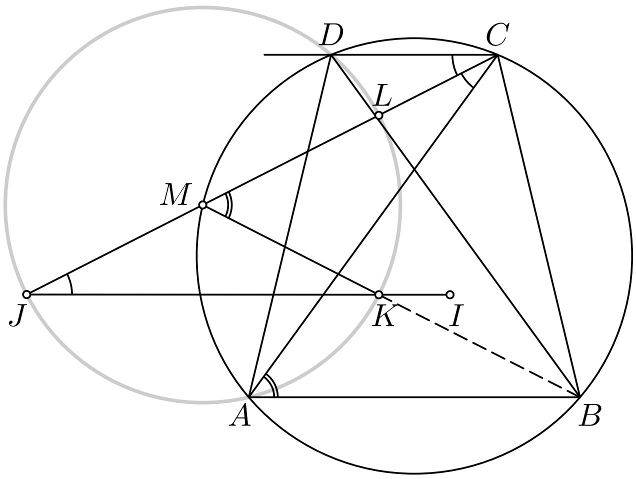
Řešení. Označme K střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD. Jelikož zřejmě platí $IK \parallel AB$, stačí dokázat $JK \parallel AB$. Označme $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = \varphi$. Pak $|\sphericalangle AKD| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ a $|\sphericalangle DJA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, takže čtyřúhelník $AKDJ$ je tětivový (obr. 4).



Obr. 4

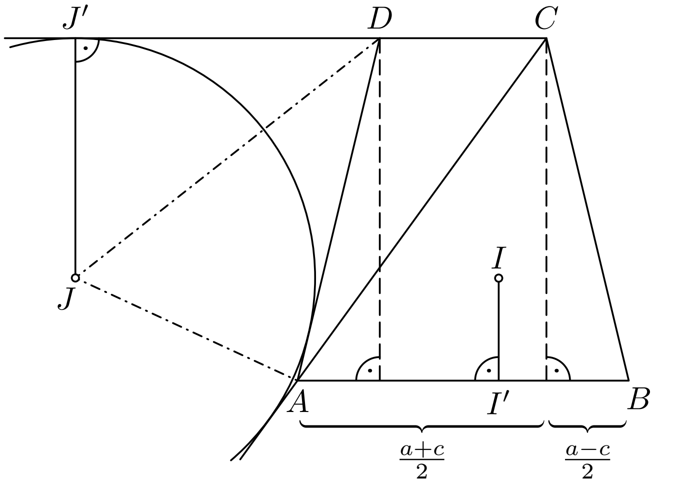
Jelikož přímky AK, DJ jsou osy střídavých úhlů, jsou rovnoběžné, což spolu s objevenou kružnicí dává $|\sphericalangle AKJ| = |\sphericalangle ADJ| = |\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle KAB|$. Přímky AB a JK jsou tedy rovnoběžné.

Poznámka. Střed M oblouku DA společné kružnice opsané trojúhelníkům ACD a ABD má jak známo obecně od vrcholů A a D stejnou vzdálenost jako od středů L a K kružnic po řadě těmto trojúhelníkům vepsaným. Protože oba úhly LAJ a LDJ jsou navíc pravé, leží body A, D, L a K na kružnici s průměrem LJ (obr. 5). Trojúhelník JKM je tudíž rovnoramenný a platí $|\sphericalangle MJK| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CMK| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CMB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle JCD|$, což dává potřebnou rovnoběžnost $JK \parallel CD \parallel AB$.



Obr. 5

Jiné řešení. Označme J' patu výšky z bodu J na přímku CD a I' patu výšky z bodu I na přímku AB (obr. 6).



Obr. 6

Stačí dokázat $|II'| + |JJ'| = v$, kde v je výška lichoběžníku. Označme $|AB| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|CD| = c$, $|AC| = |BD| = u$. Podle známých vzorců pak platí

$$|JJ'| = \frac{2S_{ACD}}{|AC| + |CD| - |AD|} = \frac{c \cdot v}{u + c - b}, \quad |II'| = \frac{2S_{ABC}}{|AB| + |BC| + |AC|} = \frac{a \cdot v}{a + b + u}.$$

Po dosazení a roznásobení zbude dokázat rovnost $u^2 = ac + b^2$, kterou dostaneme spojením dvou pythagorejských rovností

$$u^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + v^2, \quad b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2$$

anebo z Ptolemaiovy věty pro (tětivový) rovnoramenný lichoběžník $ABCD$.

---

6. *Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že pro libovolné obarvení čísel $1, 2, 3, \dots, n$ třemi barvami existují mezi uvedenými čísly dvě čísla téže barvy, jejichž rozdíl je druhá mocnina přirozeného čísla.*

(Vojtech Bálint, Michal Rolínek, Josef Tkadlec)

Řešení. Dokážeme, že hledané přirozené číslo je $n = 29$. Nejprve ukážeme, že ať obarvíme prvních 29 přirozených čísel jakkoli, vždy mezi nimi budou nějaká dvě čísla stejné barvy, jež se budou lišit o druhou mocninu přirozeného čísla. A poté uvedeme příklad vhodného obarvení 28 čísel, které ukáže, že požadovanou vlastnost nemá žádné $n \leqq 28$.

Připusťme naopak, že prvních 29 přirozených čísel lze obarvit třemi barvami A, B, C tak, že rozdíl žádných dvou čísel téže barvy není druhá mocnina, a označme $f(i)$ barvu čísla i pro $i \in \{1, 2, \dots, 29\}$.

Jelikož 9, 16 a 25 jsou druhé mocniny, musejí mít každá dvě z čísel 1, 10, 26 různou barvu. Totéž platí i pro každá dvě z čísel 1, 17, 26, tudíž čísla 10 a 17 musejí mít stejnou barvu. Stejnou úvahu uplatníme i pro další trojice tvaru $a, a+9, a+25$ a $a, a+16, a+25$, $a \in \{2, 3, 4\}$, tudíž stejnou barvu musejí mít i čísla 11 a 18, 12 a 19, 13 a 20, tedy $f(11) = f(18)$, $f(12) = f(19)$ a $f(13) = f(20)$.

Označme A barvu čísel 10 a 17, tj. $f(10) = f(17) = A$. Jelikož čísla 10 a 11 se liší o $1 = 1^2$, musí mít dvojice 11, 18 jinou barvu než A, označme jejich barvu jako B. Jelikož $19 = 18 + 1^2 = 10 + 3^2$, musí být $f(19)$ různé od $f(18) = B$ i $f(10) = A$, takže $f(12) = f(19) = C$. Z rovností $20 = 19 + 1^2 = 11 + 3^2$ ovšem podobně plyne, že $f(20) \neq f(19) = C$ a $f(20) \neq f(11) = B$, musí proto být $f(13) = f(20) = A$. Odvodili jsme $f(13) = A = f(17)$, což je kýžený spor, neboť $17 - 13 = 4 = 2^2$. Pro prvních 29 čísel tudíž takové obarvení neexistuje.

Protipříklad pro $n = 28$ uvádíme v následující tabulce.

	1 B	2 C	3 A	4 C
5 A	6 B	7 C	8 B	9 C
10 A	11 B	12 C	13 B	14 C
15 A	16 B	17 A	18 B	19 C
20 A	21 B	22 A	23 B	24 C
25 A	26 C	27 A	28 B	

Obr. 7

Snadno ověříme, že každá dvě čísla, která se liší o 1, 4, 9, 16 nebo 25 jsou obarvena různou barvou.