Dvě stříbra a dva bronzy z IMO 2018

Mezinárodní matematická olympiáda zavítala letos v červenci již pošesté ve své historii do Rumunska, kde se v roce 1959 konal i její první ročník. Soutěž hostilo studentské město Cluj-Napoca v srdci Transylvánie a zúčastnilo se jí 594 soutěžících ze 107 zemí. Naši studenti dovezli dvě stříbrné a dvě bronzové medaile.

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo z 28 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro ostrou soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadání vybraných úloh naleznete na konci této zprávy. Zmiňme, že autorem druhé soutěžní úlohy je *Patrik Bak* ze Slovenska.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Rumunska o tři dny později. Ubytováni byli po několika různých hotelích v centru města.

Soutěž proběhla 11. a 12. července ve sportovní hale. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh a za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády doveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na ně bylo letos nutné získat aspoň 16, 21, resp. 31 bodů (z 42 možných).

Českou republiku reprezentovali *Matěj Doležálek* z Gymnázia Dr. A. Hrdličky v Humpolci, *Pavel Hudec* z Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Lenka Kopfová* z Mendelova Gymnázia v Opavě, *Danil Koževnikov* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Radek Olšák* z Mensa Gymnázia v Praze a *Martin Raška* z Wichterlova Gymnázia v Ostravě-Porubě. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z IST Austria, pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek*, Ph.D., z Institutu Maxe Plancka v Tübingenu.

Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
320.–337.	Matěj Doležálek	7	4	0	0	2	0	13	HM
111.–121.	Pavel Hudec	7	5	0	7	7	1	27	S
215.–227.	Lenka Kopfová	7	3	0	7	1	1	19	B
87.–110.	Danil Koževnikov	7	7	0	7	7	0	28	S
368.–390.	Radek Olšák	1	0	0	7	1	1	10	HM
228.–251.	Martin Raška	7	3	0	7	1	0	18	B
	Celkem	36	22	0	35	19	3	115	

Tým, který se po 10 letech konečně neskládal ze samých chlapců, získal dvě stříbrné medaile (Danil a Pavel), dvě bronzové medaile (Lenka a Martin) a dvě čestná uznání (Matěj a Radek), která se udělují za úplně vyřešení alespoň jedné úlohy. V neoficiálním pořadí států dělila ČR 39.–40. místo s Argentinou. Tento jinak nadprůměrný výkon českého družstva zastínili historickými výkony naši sousedé: Slováci poprvé po více než deseti letech získali tři stříbrné medaile a Poláci se poprvé od roku 1981 umístili v první desítce (devátí).

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
250.–272.	Samuel Krajči	7	2	0	7	1	0	17	B
193.–203.	Lucia Krajčoviechová	7	2	0	7	5	0	21	B
61.–86.	Martin Melicher	7	7	0	7	7	1	29	S
111.–121.	Tomáš Sásik	7	7	0	7	6	0	27	S
215.–227.	Michal Staník	2	3	0	7	7	0	19	B
111.–121.	Ákos Záhorský	7	7	0	7	6	0	27	S
	Celkem	37	28	0	42	32	1	140	

Co se týče ostatních států, na čele se umístila tradiční trojice USA, Rusko, Čína, následovaná netradičně Ukrajinou. V první desítce kromě výše zmíněného Polska najdeme již jen východoasijské státy. Kompletní výsledky jsou dostupné na

`https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2018`.

Přestože se českému týmu ve výsledku dařilo, několik žáků zůstalo za očekáváním. Oba maturanti měli zlaté ambice a medaile byly zcela jistě i v silách Radka a Matěje. V jejich případě lze doufat, že své zklamání přetaví ve zvýšené nasazení během následujícího školního roku, za něž pak mohou být odměněni na příští, jubilejní 60. mezinárodní matematické olympiádě, která proběhne v městě Bath ve Velké Británii.

Celkové pořadí států naleznete v následující tabulce:

	G	S	B	body
USA	5	1	0	212
Rusko	5	1	0	201
ČLR	4	2	0	199
Ukrajina	4	2	0	186
Thajsko	3	3	0	183
Tchaj-wan	3	1	2	179
Jižní Korea	3	3	0	177
Singapur	2	3	1	175
Polsko	1	5	0	174
Indonésie	1	5	0	171
Austrálie	2	3	1	169
Velká Británie	1	4	0	161
Japonsko	1	3	2	158
Srbsko	2	2	2	158
Maďarsko	0	4	2	157
Kanada	0	5	1	156
Itálie	0	4	2	154
Kazachstán	0	4	2	151
Írán	1	3	1	150
Vietnam	1	2	3	148
Bulharsko	1	3	1	146
Chorvatsko	0	4	1	145
Slovensko	0	3	3	140
Švédsko	1	2	2	138
Turecko	1	1	4	138
Izrael	0	2	4	136
Gruzie	0	1	5	133
Brazílie	1	0	4	132
Indie	0	3	2	132
Mongolsko	0	1	5	132
Německo	1	2	1	131
Arménie	0	2	4	130
Francie	1	1	4	129
Rumunsko	1	1	2	129
Peru	0	2	3	125
Mexiko	0	1	4	123
Nizozemsko	0	1	4	123
Filipíny	1	1	2	121
Argentina	0	1	4	115
Česká republika	0	2	2	115
Bangladéš	1	0	3	114
Slovinsko	0	1	1	104
Bosna a Hercegovina	0	0	4	103
Tádžikistán	0	0	5	103
Bělorusko	0	0	4	102
Nový Zéland	0	1	2	102
Belgie	0	0	4	92
Malajsie	0	0	2	90
Hongkong	0	0	2	89
Moldavsko	0	0	3	86
Estonsko	0	1	0	80
Litva	0	0	2	77
Portugalsko	0	0	2	77
Řecko	0	0	2	74

	G	S	B	body
Španělsko	0	0	2	74
Norsko	0	0	2	73
Rakousko	0	0	3	72
Dánsko	0	0	3	71
Finsko	0	0	2	70
Saudská Arábie	0	1	1	69
Sýrie	0	0	2	69
JAR	0	0	1	66
Kostarika	0	0	2	65
Turkmenistán	0	0	1	65
Makao	0	0	1	61
Kolumbie	0	0	1	59
Island	0	0	1	56
Švýcarsko	0	0	1	52
Ázerbájdžán	0	0	0	50
Tunisko	0	0	0	49
Ekvádor	0	0	0	48
Srí Lanka	0	0	1	47
Maroko	0	0	0	46
Portoriko	0	0	1	46
Kypr	0	0	1	45
Irsko	0	0	1	43
Kyrgyzstán	0	0	0	41
Lotyšsko	0	0	0	40
Albánie	0	0	0	37
Pákistán	0	0	0	35
Bolívie	0	0	0	33
Makedonie	0	0	0	27
Nigérie	0	0	0	26
Trinidad a Tobago	0	0	0	26
Myanmar	0	0	0	23
Kosovo	0	0	0	21
Panama	0	0	0	21
Uzbekistán	0	0	0	21
Černá Hora	0	0	0	20
Salvádor	0	0	0	20
Chile	0	0	0	19
Alžírsko	0	0	0	18
Lucembursko	0	0	0	14
Ghana	0	0	0	13
Botswana	0	0	0	12
Paraguay	0	0	0	12
Kambodža	0	0	0	11
Guatemala	0	0	0	11
Egypt	0	0	0	10
Irák	0	0	0	9
Uganda	0	0	0	9
Pobřeží slonoviny	0	0	0	8
Uruguay	0	0	0	7
Honduras	0	0	0	6
Nepál	0	0	0	5
Venezuela	0	0	0	2
Tanzánie	0	0	0	1

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s opsanou kružnicí Γ. Body D, E leží postupně uvnitř stran AB, AC tak, že $|AD| = |AE|$. Osy úseček BD, CE protínají kratší oblouky AB, AC kružnice Γ postupně v bodech F, G. Dokažte, že přímky DE a FG jsou rovnoběžné (nebo totožné).

(*Řecko*)

2. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. (*Slovensko*)

3. *Packalův trojúhelník* je tabulka čísel ve tvaru rovnostranného trojúhelníku taková, že kromě čísel ve spodním řádku je každé číslo rovno absolutní hodnotě rozdílu dvou čísel bezprostředně pod ním. Následující tabulka je příkladem Packalova trojúhelníku o čtyřech řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Rozhodněte, zda existuje Packalův trojúhelník o 2018 řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po $1 + 2 + \ldots + 2018$. (*Írán*)

4. *Značka* je bod (x, y) v rovině takový, že x a y jsou kladná celá čísla nepřevyšující 20.

Na začátku je všech 400 značek prázdných. Amálka a Budulínek na ně střídavě pokládají kamínky, přičemž Amálka začíná. Amálka ve svém tahu položí nový červený kamínek na prázdnou značku tak, aby vzdálenost každých dvou značek s červenými kamínky byla různá od $\sqrt{5}$. Budulínek ve svém tahu položí nový modrý kamínek na jakoukoli prázdnou značku. (Značka s modrým kamínkem může mít jakékoli vzdálenosti od ostatních značek.) Hra skončí, jakmile jeden z hráčů nemůže táhnout.

Najděte největší K takové, že Amálka může vždy položit alespoň K červených kamínků, ať už hraje Budulínek jakkoli. (*Arménie*)

5. Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Předpokládejme, že existuje celé číslo $N > 1$ takové, že pro všechna $n \geqq N$ je číslo

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokažte, že existuje celé číslo M takové, že $a_m = a_{m+1}$ pro všechna $m \geqq M$. (*Mongolsko*)

6. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Uvnitř něj leží bod X takový, že

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokažte, že $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180°$. (*Polsko*)