EGMO 2018 v Itálii

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

EGMO je zkratka soutěže European Girls' Mathematical Olympiad, neboli Evropské matematické olympiády pro středoškolské dívky. Tato soutěž je svým charakterem téměř identická se staršími kolegyněmi, jako je Mezinárodní matematická olympiáda (IMO) a Středoevropská matematická olympiáda (MEMO), obě pro obě pohlaví. Těchto dvou soutěží se účastní nejvýše šest řešitelů, kdežto na EGMO soutěží maximálně čtyři dívky.

EGMO má ve svém názvu „evropská“, ale už od samého začátku se jí účastní i země mimoevropské. Soutěž se neustále rozrůstá, ať už o země evropské, tak také o ty mimoevropské. Soutěž EGMO byla poprvé uspořádána v roce 2012 v Anglii v Cambridge za účasti 19 zemí (z toho tří neevropských – Indonésie, Saudské Arábie a USA), poté v roce 2013 v Lucembursku za účasti 22 zemí (mimo Evropu jen USA), v roce 2014 v Turecku za účasti 29 zemí (z toho 7 neevropských), v roce 2015 v Bělorusku za účasti 30 zemí (z toho 7 neevropských), v roce 2016 v Rumunsku za účasti 39 zemí (z toho 7 neevropských) a v roce 2017 ve Švýcarsku za účasti 44 zemí (z toho 10 neevropských).

Letos proběhl od 9. do 15. dubna 2018 již sedmý ročník soutěže EGMO v toskánském městě Florencii. Pozitivem byla centralizace ubytování i samotné soutěže do stejného hotelu. Zúčastněných zemí bylo již 52, z toho 16 neevropských. Soutěžících dívek bylo 196, z toho 137 z Evropy.

Česká republika se letos zúčastnila této soutěže již potřetí. Můžeme za to vděčit především těmto sponzorům: Nadaci RSJ, Nadaci Karla Janečka, Společnosti Alef Nula a soukromému sponzorovi Pavlu Kocourkovi. Všichni z nich pochopili, jak důležité je chopit se každé příležitosti, jak podpořit vzdělání mladé generace v našich oborech.

Evropské země mají pobyt na soutěži placený z evropských prostředků a prostředků organizátorské země, kdežto neevropské země si platí účast samy, což je důležitým zdrojem příjmů pro celou soutěž. Zde je patrné, že i země, které si musejí svoji účast platit, nelitují prostředků, aby měly dívky příležitost poměřit se se svými soupeřkami z jiných zemí.

Nominace českého družstva na IMO a MEMO probíhá až po uspořádání celostátního kola. Jelikož ale EGMO probíhá tradičně v dubnu, což je v době našeho celostátního kola, není technicky možné čekat na jeho výsledky. Proto nominace dívek na EGMO probíhá již na základě výsledků krajského kola kategorie A.

České družstvo v roce 2018 reprezentovaly tyto dívky: *Lenka Kopfová* z Mendelova gymnázia v Opavě, *Lucie Kundratová* z Gymnázia a Jazykové školy s právem státní jazykové zkoušky ve Zlíně, *Magdaléna Mišinová* z Gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a *Jana Pallová* z Gymnázia Jakuba Škody v Přerově. Vedoucím české delegace byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.* z FIT ČVUT v Praze a jeho zástupcem *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z PřF UP v Olomouci (obr. 1).

Obr. 1: České družstvo (zleva): Jaroslav Švrček, Jana Pallová, Lenka Kopfová, Magdaléna Mišinová, Lucie Kundratová, Jaroslav Zhouf

Dívky řešily ve dvou dnech po třech úlohách, z nichž každá měla hodnotu nejvýše 7 bodů, takže bylo možné získat až 42 bodů. Podle pravidel soutěže EGMO je z evropských dívek zhruba polovina odměněna medailí (na IMO a MEMO to je nejvýše polovina). Letos tedy bylo ze 137 evropských dívek odměněno medailí 78 z nich, z toho 14 získalo zlatou medaili za aspoň 32 bodů, 29 získalo stříbrnou medaili za aspoň 22 bodů a 35 získalo bronzovou medaili za aspoň 15 bodů. Současně s těmito evropskými dívkami jsou medailí odměněny i neevropské dívky, které dosáhnou stejného bodového zisku. Takže v součtu 196 dívek bylo uděleno 17 zlatých, 39 stříbrných a 52 bronzových medailí.

Kromě medailí získávají soutěžící ještě čestná uznání (honourable mentions) za úplné vyřešení aspoň jedné ze šesti úloh (stejné je to na IMO i MEMO). Letos toto uznání získalo dalších 37 dívek z Evropy a dalších 8 neevropských dívek.

Absolutními vítězkami v roce 2018 se stalo 5 dívek se ziskem 42 bodů: Jelena Ivančič ze Srbska, Alina Haluzova z Ukrajiny, Emily Beatty z Velké Británie, Catherine Wu z USA a Wanlin Li z USA.

Z našich dívek získala Lenka Kopfová (obr. 2) stříbrnou medaili za 25 bodů a skončila absolutně na 35.–43. místě, Magdaléna Mašinová (obr. 2) získala bronzovou medaili za 17 bodů a skončila absolutně na 80.–90. místě, Lucie Kundratová získala čestné uznání za 11 bodů a Jana Pallová získala čestné uznání za 10 bodů. Celkem tedy získalo české družstvo 63 bodů ze 168 možných. Neoficiálně se tak umístilo na 28. místě.

Obr. 2: Magdaléna Mišinová s bronzovou medailí a Lenka Kopfová se stříbrnou medailí

Nejúspěšnějšími zeměmi byly: 1. Rusko (4 zlaté medaile, 145 bodů), 2. USA (2 zlaté, jedna stříbrná, jedna bronzová medaile, 129 bodů), 3. Velká Británie (1 zlatá, 2 bronzové, 1 bronzová medaile, 111 bodů), 4. Polsko, 5. Ukrajina, 6. Srbsko, 7.–8. Maďarsko a Mexiko, 9. Rumunsko, 10. Bělorusko.

Následně jsou uvedeny soutěžní úlohy prvního i druhého dne. Zajímavé může být, že průměrná úspěšnost jednotlivých úloh byla: 1. úloha 5,754 bodu, 2. úloha 2,621 bodu, 3. úloha 1,344 bodu, 4. úloha 4,313 bodu, 5. úloha 2,200 bodu, 6. úloha 0,579 bodu.

Pro dívky byl ve volném čase připraven společný program. Např. jeden den navštívily krásná toskánská hměsta Pisa a Lucca.

Celé soutěžní klání se konalo v přátelském duchu a bylo povzbuzením pro zúčastněné dívky ke studiu matematiky a doufejme, že bude povzbuzením i pro další dívky, které budou usilovat o reprezentaci v příštích letech.

Příští rok se soutěž bude konat v ukrajinském hlavním městě Kyjevě.

Více informací je možné získat na stránkách https://www.egmo.org/egmos/egmo5/.

Soutěžní úlohy prvního dne

Úloha 1. V trojúhelníku ABC je $|CA| = |CB|$ a $|\sphericalangle ACB| = 120°$ a M je střed strany AB. Nechť P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC a Q bod na úsečce CP takový, že $|QP| = 2|QC|$. A nechť přímka procházející bodem P a kolmá na přímku AB protne přímku MQ v bodě N.

Dokažte, že existuje určitá kružnice, na které leží všechny body N pro všechny možné polohy bodu P.

(*Bulharsko*)

Úloha 2. Uvažujme množinu

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

(a) Dokažte, že každé přirozené číslo $x \geq 2$ může být napsáno jako součin jednoho nebo více prvků z A, které nemusejí být nutně různé.

Součin jednoho prvku znamená ten prvek sám.

(b) Pro každé přirozené číslo $x \geq 2$ nechť $f(x)$ značí nejmenší přirozené číslo takové, že x může být napsáno jako součin $f(x)$ prvků množiny A, které nemusejí být nutně různé.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic (x, y) přirozených čísel $x \geq 2$, $y \geq 2$, pro které platí $f(xy) < f(x) + f(y)$.

(Dvojice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou různé, právě když $x_1 \neq x_2$ nebo $y_1 \neq y_2$.)

(*Rumunsko*)

Úloha 3. Pojmenujme n soutěžících dívek na EGMO jako $C_1, \ldots, C_n$. Po soutěži se tyto dívky postaví do fronty před restaurací podle následujících pravidel.

- Jury vytvoří počáteční uspořádání dívek ve frontě.
- Každou minutu Jury zvolí jedno přirozené číslo i, kde $1 \leq i \leq n$.
  - Má-li dívka C_i aspoň i jiných dívek před sebou, zaplatí jedno euro na konto Jury a posune se dopředu v řadě přesně o i míst.
  - Má-li dívka C_i méně než i jiných dívek před sebou, restaurace otevře a proces skončí.

(a) Dokažte, že proces nemůže pokračovat do nekonečna podle pravidel Jury.

(b) Určete pro každé n největší počet eur, které Jury může získat pro libovolné počáteční uspořádání fronty i pro libovolnou volbu posloupnosti přemísťování dívek.

(*Maďarsko*)

Soutěžní úlohy druhého dne

Úloha 4. *Domino* je kostka 1×2 nebo 2×1.

Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Kostky domina se umísťují na desku s $n \times n$ políčky takovým způsobem, že každé domino pokrývá přesně dvě políčka na desce a žádná dvě domina se ani částečně nepřekrývají.

Hodnota řady nebo sloupce na desce je počet kostek domina, které pokrývají aspoň jedno políčko této řady nebo tohoto sloupce. Konfigurace kostek domin se nazývá *vybalancovaná*, právě když existuje nějaké přirozené číslo $k \geq 1$ takové, že každá řada a každý sloupec má hodnotu k.

Dokažte, že vybalancovaná konfigurace existuje pro každé $n \geq 3$, a najděte minimální počet kostek domina potřebných pro takovou konfiguraci.

(*Holandsko*)

Úloha 5. Nechť Γ je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Kružnice Ω se dotýká úsečky AB a kružnice Γ v bodě ležícím ve stejné polorovině ohraničené přímkou AB, jako leží bod C. Osa $\sphericalangle BCA$ protíná kružnici Ω ve dvou různých bodech P a Q.

Dokažte, že

$$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle QBC|.$$

(*Polsko*)

Úloha 6.

(a) Dokažte, že pro každé reálné číslo t, $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje kladné celé číslo n s následující vlastností: Pro každou množinu S sestávající z n kladných celých čísel existují dva různé prvky x a y množiny S a nezáporné celé číslo m (tj. $m \geq 0$) takové, že

$$|x - my| \leq ty.$$

(b) Určete, zda pro každé reálné číslo t, $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje nekonečná množina S kladných celých čísel taková, že

$$|x - my| > ty$$

pro každou dvojici různých prvků x a y množiny S a každé kladné celé číslo m (tj. $m > 0$).

(*Holandsko*)