Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *O posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že pro všechna přirozená čísla n platí*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Najděte všechny hodnoty a_1, pro které je tato posloupnost konstantní.
b) Nechť $a_1 = 5$. Určete největší celé číslo nepřevyšující a_{2018}. (Vojtech Bálint)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = b_n^2 - 2$. Najděte všechny hodnoty b_1, pro které jsou všechny členy $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rovny b_1. [Ze vztahu pro $n = 1$ dostáváme $b_1 = b_1^2 - 2$, z čehož $b_1 \in \{-1, 2\}$. Následně ověříme, že tyto hodnoty vyhovují.]

N2. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že $b_1 = 1$ a že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = 3b_n/(b_n + 1)$. Dokažte, že všechny členy posloupnosti jsou z intervalu $\langle 1, 2)$. [Matematickou indukcí ověřte, že pro všechna přirozená n platí nerovnosti $1 \leqq b_n < 2$.]

D1. O posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je známo, že pro všechna přirozená čísla n platí $b_{n+1} = 2b_n^2/(b_n^2 - 3)$. Najděte všechny hodnoty b_1 takové, že posloupnost $b_2, b_3, b_4, \ldots$ je konstantní. [Odvoďte, že $b_{n+1} = b_n$, právě když $b_n \in \{-1, 0, 3\}$, takže b_2 musí být rovno jedné z těchto hodnot. Následně vypočítáme odpovídající hodnoty b_1. Výsledek je $b_1 \in \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.]

D2. Odvoďte explicitní vyjádření posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ z úlohy N2. [Zadaný vztah upravíme na $3 \cdot 1/b_{n+1} = 1 + 1/b_n$. Posloupnost $c_n = 1/b_n$ tedy splňuje rovnost $3c_{n+1} = c_n + 1$. Substitucí $c_n = d_n + 1/2$ se zbavíme konstantního členu a dostaneme $3d_{n+1} = d_n$. Posloupnost d_n je tedy geometrická, takže dovedeme určit její explicitní tvar. Zpětným dosazováním postupně najdeme vyjádření pro b_n. Výsledek je $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}/(3^{n-1} + 1)$.]

D3. Nejznámější rekurentně definovaná posloupnost je Fibonacciova posloupnost. Ta je dána vztahy $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ a rekurentním vztahem $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ platícím pro každé $n \geqq 3$. Dokažte, že $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ a $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$. [Postupujte matematickou indukcí podle n.]

2. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových souměrnostech po řadě podle přímek AB, AC. Dále označme E_1 a E_2 body na přímce BC takové, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokažte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 leží na téže kružnici, jejíž střed leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu. [Mějme kružnici k se středem O a její tětivu AB. Nechť X je bod na k. Tvrzení dokážeme v případě, kdy je O

vnitřním bodem trojúhelníku ABX (v ostatních případech je důkaz podobný). Označme $|\sphericalangle AXO| = \alpha$ a $|\sphericalangle BXO| = \beta$. Z rovnoramenných trojúhelníků AOX a BOX spočteme, že $|\sphericalangle XOA| = 180^\circ - 2\alpha$ a $|\sphericalangle XOB| = 180^\circ - 2\beta$. Z toho snadno máme $|\sphericalangle AOB| = 2(\alpha + \beta)$, což jsme měli dokázat.]

N2. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když je součet jeho protilehlých úhlů roven 180°. [Je-li $ABCD$ tětivový, označme O střed kružnice mu opsané. Konvexní a nekonvexní úhel AOC dávají dohromady 360°. Z věty o obvodovém a středovém úhlu máme, že tento součet je roven dvojnásobku součtu velikostí úhlů ABC a ADC — tento součet je tedy roven 180°. Předpokládejme naopak, že součet protilehlých úhlů je roven 180°. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|\sphericalangle ADC| \geqq 90^\circ$. Potom $|\sphericalangle ABC| \leqq 90^\circ$. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ADC. Bod O zřejmě leží v polorovině ACB. Navíc snadno vypočteme, že konvexní úhel AOC má velikost rovnou dvojnásobku úhlu při vrcholu B. Spolu s $|OA| = |OC|$ tak máme, že O musí nutně být středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, takže je středem kružnice opsané celému čtyřúhelníku $ABCD$.]

N3. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. [Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, tak oba tyto úhly jsou rovny půlce příslušného středového úhlu AOB. Pokud naopak platí uvedená rovnost, označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Podívejme se na bod O z pohledu trojúhelníku ABD. Máme $|OA| = |OB|$. Dále velikost úhlu AOB (konvexního nebo nekonvexního) je rovna dvojnásobku velikosti úhlu při D. Jelikož leží ve „správné“ polorovině vzhledem k přímce AB, musí jít o střed kružnice opsané ABD, tedy i celému čtyřúhelníku.]

N4. Je dán ostrý úhel XAY a uvnitř něho bod P. Nechť P_1, P_2 jsou obrazy bodu P v osové souměrnosti podle jednotlivých ramen AX, AY úhlu XAY. Dokažte, že $|\sphericalangle P_1AP_2| = 2|\sphericalangle XAY|$. [Označme $|\sphericalangle XAP| = \alpha$ a $|\sphericalangle PAY| = \beta$. Potom $|\sphericalangle XAY| = \alpha + \beta$. Díky osové souměrnosti platí $|\sphericalangle P_1AX| = \alpha$ a $|\sphericalangle P_2AY| = \beta$. Je tedy opravdu $|\sphericalangle P_1AP_2| = 2(\alpha + \beta)$.]

D1. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť D, E, F jsou po řadě paty výšek na strany BC, CA, AB. Dokažte, že se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě. [Nechť H značí průsečík přímek BE a CF. Stačí dokázat, že přímka AH je kolmá na BC. Všimněme si, že body A, F, H, E leží na kružnici díky pravým úhlům při vrcholech E, F. Totéž platí i pro body B, C, E, F. Je tedy $|\sphericalangle HAE| = |\sphericalangle HFE| = |\sphericalangle CBE| = 90^\circ - \gamma$. Z toho již plyne dokazovaná kolmost.]

D2. Označme H průsečík přímek z úlohy D1. Dokažte, že H je středem kružnice vepsané trojúhelníku DEF. [Díky symetrii stačí dokázat, že DH je osa vnitřního úhlu EDF. Jelikož DH a DB jsou kolmé, stačí dokázat, že DB je osa vnějšího úhlu EDF, tedy že $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$. Oba tyto úhly jsou ale rovny α, což je vidět z tětivových čtyřúhelníků $AFDC$, resp. $AEDB$ (ty jsou tětivové díky pravému úhlu nad tětivami AC, resp. AB).]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu jeho výšky na stranu BC. Dokažte, že paty kolmic z D na zbývající strany a zbývající výšky leží v přímce. [Nechť P, Q, R jsou postupně kolmé průměty bodu D na AB, AC a výšku z vrcholu B, jejíž patu ještě označíme S. Čtyřúhelníky $BDRP$, $DQSR$, $ASDB$ jsou díky pravým úhlům tětivové. Z nich postupně vypočítáme $|\sphericalangle DRP| =$

$= 180° - \beta$ a $|\sphericalangle DRQ| = |\sphericalangle DSC| = \beta$. Body P, Q, R jsou tedy kolineární. Díky symetrii jsme hotovi.]

D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H a středem kružnice opsané O. Dokažte, že přímky AH, AO jsou souměrně sdružené podle osy vnitřního úhlu BAC (takové dvojice přímek se společným bodem A se nazývají *izogonální* vzhledem k danému úhlu BAC). [Snadno vypočteme, že $|\sphericalangle BAH| = 90° - \beta$. Z rovnoramenného trojúhelníku AOC a věty o obvodovém a středovém úhlu pak určíme, že $|\sphericalangle CAO| = 90° - \beta$, takže $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAO|$, odkud již plyne dokazované tvrzení.]

D5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Dokažte, že polopřímky izogonální vzhledem k úhlu BAC (viz definici izogonality v předešlé úloze) protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech různých od A, které jsou souměrně sdruženy podle osy úsečky BC. [Označme K a L průsečíky těchto přímek s kružnicí opsanou. Z definice izogonality máme $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$, takže tětivy BK a CL mají stejnou velikost, a tak body B, C, K, L tvoří rovnoramenný lichoběžník, z čehož už plyne dokazované tvrzení.]

3. *Najděte všechna nezáporná celá čísla m, n, pro něž platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3$.*

(Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že n^{n+1} je druhou mocninou přirozeného čísla. [Zjevně vyhovují všechna lichá čísla n, neboť tehdy je exponent $n+1$ sudý. Pokud je n sudé, je exponent $n+1$ lichý, takže i samo n musí být druhou mocninou celého čísla, tj. $n = 4k^2$ pro nějaké celé číslo k.]

N2. Najděte všechna řešení nerovnice $|x^2 - y^2| \leqq 2$, kde x, y jsou celá čísla. [Máme rovnici $(x-y)(x+y) = a$, kde $|a| \leqq 2$. Je tak buď $(x-y)(x+y) = 0$ a úloze vyhovují libovolné dvojice (x, x) a $(x, -x)$, kde x je celé, anebo $|x+y| = |x-y| = 1$, protože obě čísla $x-y$, $x+y$ mají zřejmě stejnou paritu. Snadno tak najdeme další čtyři vyhovující dvojice: $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.]

D1. Dokažte, že žádné číslo tvaru $4k+2$, kde k je celé číslo, nelze zapsat jako rozdíl dvou druhých mocnin celých čísel. [Druhé mocniny celých čísel dávají při dělení 4 zbytky 0 a 1, rozdíl dvou z nich tedy může dát jen zbytek 0, 1 nebo $3 \equiv -1$.]

D2. Najděte všechna přirozená čísla x taková, že $x^2 + x - 2$ je mocnina dvou. [Platí $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, takže obě čísla $x-1$ a $x+2$ musejí být mocniny dvou. Jejich rozdíl je roven 3, tudíž jedna z těchto mocnin musí být lichá. Jediná možnost je $x - 1 = 2^0 = 1$ neboli $x = 2$, které opravdu vyhovuje, neboť $x^2 + x - 2 = 4$.]

D3. Najděte všechna přirozená x taková, že $x^2 + x + 1$ je druhou mocninou celého čísla. [Žádné takové číslo x neexistuje, neboť $x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$.]

4. *Je dána množina* M *přirozených čísel s n prvky, kde n je liché číslo větší než jedna. Dokažte, že počet uspořádaných dvojic (p, q) různých prvků z* M *takových, že aritmetický průměr čísel p, q je prvkem* M, *je nejvýše $\frac{1}{2}(n-1)^2$.*

(Martin Panák, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že pokud $p < q$, leží aritmetický průměr čísel p a q v intervalu (p, q). [Je třeba ověřit nerovnosti $p < (p+q)/2$ a $(p+q)/2 < q$. Obě jsou ekvivalentní s $p < q$.]

N2. Jsou dána čtyři přirozená čísla $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Může být číslo x_2 aritmetickým průměrem dvou různých (neuspořádaných) dvojic z těchto čísel? [Ne. Aby bylo x_2 průměrem nějakých dvou čísel, muselo by jedno z nich být menší než x_2, zatímco druhé by bylo větší. Jediný kandidát na menší číslo je x_1. Pokud by ale platilo $x_2 = (x_1 + x_3)/2$ a $x_2 = (x_1 + x_4)/2$, měli bychom $x_3 = x_4$, což je ve sporu s předpokladem.]

N3. Je dána množina čísel $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kolik dvojic čísel $p < q$ z této množiny splňuje, že číslo $(p + q)/2$ je jedním z prvků množiny? [Čísla 1 a 5 zřejmě nejsou průměrem žádných dvou čísel. Čísla 2 a 4 jsou průměry dvojic $(1, 3)$ resp. $(3, 5)$. Konečně číslo 3 je průměrem dvojic $(1, 5)$ a $(2, 4)$. Dohromady máme čtyři dvojice.]

D1. Dokažte, že pro sudé n je maximální počet dvojic zkoumaných úlohou roven $\frac{1}{2}n(n - 2)$.

D2. Pro každé přirozené n (sudé i liché) najděte příklad množiny, pro niž je počet zkoumaných dvojic maximální.

D3. Zůstane tvrzení úlohy v platnosti, i když místo množiny přirozených čísel uvažujeme množinu reálných čísel?

D4. Zůstane tvrzení v platnosti, i když nahradíme aritmetický průměr geometrickým?

5. *Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho obvod o, poloměr ϱ kružnice připsané ke straně BC a velikost výšky v na tuto stranu. Proveďte diskusi v závislosti na daných délkách.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Je dán trojúhelník ABC. Uvažujme kružnici připsanou straně BC tohoto trojúhelníku a označme P, Q, R dotykové body této kružnice s přímkami BC, CA, AB. Dokažte, že velikost úsečky $|AQ|$ je rovna polovině obvodu trojúhelníku ABC. [Zřejmě $|AQ| = |AR|$ a platí $|AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = |AB| + |BC| + |CA|$, odkud plyne dokazované tvrzení.]

N2. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 se středy v bodech O_1, O_2, které nemají společný bod a žádná neleží ve vnitřní oblasti druhé. Připomeňte si, jak sestrojit společné vnitřní tečny těchto kružnic. [Tyto tečny se protínají ve středu stejnolehlosti se záporným koeficientem, která převádí jednu kružnici na druhou. Stačí najít tento střed a sestrojit z něj tečny. Tento střed najdeme například takto: Vezmeme body $P \in k_1$, $Q \in k_2$ takové, že $PO_1 \parallel QO_2$, přičemž P, Q leží v navzájem opačných polorovinách vzhledem k O_1O_2. Hledaný střed stejnolehlosti je pak průsečíkem přímek O_1O_2 a PQ. Jiný postup konstrukce společných vnitřních tečen daných kružnic $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ plyne z toho, že tyto přímky jsou zřejmě rovnoběžné s tečnami z bodu O_2 k pomocné kružnici $k_1'(O_1, r_1 + r_2)$, které snadno sestrojíme užitím Thaletovy kružnice s průměrem O_1O_2.]

N3. Sestrojte trojúhelník ABC, pokud znáte jeho obvod, výšku na stranu BC a velikost úhlu α. [Označme P a Q body na polopřímkách opačných k BC a CB takové, že $|BP| = |BA|$ a $|CQ| = |CA|$. Z rovnoramenných trojúhelníků BAP a CAQ snadno spočítáme, že $|\sphericalangle BAP| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle CAQ| = \frac{1}{2}\gamma$. Tím pádem $|\sphericalangle PAQ| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \alpha = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. V trojúhelníku APQ známe stranu PQ, úhel při vrcholu A a také výšku na stranu PQ, takže ho umíme sestrojit. Body B, C následně najdeme jak průsečíky strany PQ a os úseček AP a AQ.]

D1. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice mu vepsaná se dotýká stran BC, CA, AB v bodech P, Q, R. Dokažte, že $|AQ| = s - a$, kde $a = |BC|$ a s je polovina obvodu trojúhelníku ABC (další dvě rovnosti analogicky). [Postupujeme podobně jako v úloze N1. Platí $|AQ| = |AR|$ a $|AQ| + |AR| = |AB| - |BR| + |AC| - |CQ| = |AB| - |BP| + |AC| - |CP| = |AB| + |AC| - |BC|$, z čehož již plyne dokazované tvrzení.]

D2. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A je poloměr kružnice vepsané roven $s - a$, kde $a = |BC|$ a s je polovina obvodu ABC. [Označme I střed jeho vepsané kružnice a P, Q dotykové body s odvěsnami AB, AC. Čtyřúhelník $APIQ$ je čtverec, takže $|IQ| = |AP|$. Z výsledku úlohy D1 plyne, že $|AP| = s - a$.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice mu vepsaná se dotýká strany BC v bodě D. Kružnice připsaná jeho straně BC se jí dotýká v bodě E. Dokažte, že D, E jsou souměrně sdruženy podle středu BC. [Z úlohy D1 víme, že $|BD| = s - b$. Zbývá dokázat, že $|CE| = s - b$. Pokud označíme F dotykový bod připsané kružnice s přímkou AC, pak podle úlohy N1 máme $|AF| = s$. Je tedy $|CE| = |CF| = |AF| - |AC| = s - b$.]

D4. Dokažte, že v tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ je součet velikostí jeho protilehlých stran stejný. [Předpokládejme, že čtyřúhelník je tečnový, a označme po řadě P, Q, R, S dotykové body vepsané mu kružnice se stranami AB, BC, CD, DA. Potom $|AB| + |CD| = |AP| + |PB| + |CR| + |RD| = |AS| + |BQ| + |CQ| + |DS| = |BC| + |AD|$.]

D5. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice k mu vepsaná se dotýká strany BC v bodě D. Nechť E je obraz bodu D ve středové souměrnosti podle středu BC. Úsečka AE protíná kružnici k ve dvou bodech, označme F ten, který je blíže k bodu A. Dokažte, že $DF \perp BC$. [Podle úlohy D3 je bod E dotykový bod kružnice l připsané straně BC. Nechť I_a je střed této kružnice a I střed kružnice k. Bod A je středem stejnolehlosti, která zobrazuje l na k. V této stejnolehlosti se E zobrazuje na F, takže $IF \parallel I_aE$. Jenže I_aE je přímka kolmá na BC.]

6. *Na hrací desce je nakreslen pravidelný n-úhelník s jedním vrcholem vyznačeným jako past. Tom a Jerry hrají následující hru. Na počátku Jerry postaví figurku na některý vrchol n-úhelníku. V každém kroku pak Tom řekne nějaké přirozené číslo a Jerry posune figurku o tento počet vrcholů podle své volby buď ve směru, anebo proti směru chodu hodinových ručiček. Najděte všechna $n \geqq 3$, při kterých může Jerry tahat figurkou tak, aby nikdy neskončila v pasti. Jak se změní odpověď, když je Tom k desce otočen zády, zná jen dané n a nevidí, kam Jerry figurku na počátku postaví ani kam s ní v jednotlivých krocích táhne?* (Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyřešte úlohu pro lichá čísla n. [V tomto případě vždy vyhrává Jerry, protože se nikdy neocitne na políčku, které je z obou stran stejně vzdálené od pasti, takže vždy jeden z jeho dvou tahů nevede do pasti.]

N2. Dokažte, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Tom volí pouze čísla nejvýše rovná $n/2$. [V prvé řadě Tomovi stačí volit čísla nejvýše rovná n, protože čísla a, $a+n$ zřejmě mají stejný efekt. Rovněž je vidět, že i čísla a, $n-a$ mají stejný efekt. Tomovi tedy stačí volit vždy menší číslo z dvojice a, $n-a$. To je zřejmě nejvýše rovno $n/2$.]

N3. Vyřešte úlohu pro $n = 6$. [Očíslujme vrcholy $0, 1, \ldots, 5$ tak, že 0 je past. Figurka nikdy nemůže být na vrcholu s číslem 3, protože tahem 3 by nutně skončila v pasti. Podle úlohy N2 stačí předpokládat, že Tom říká jen čísla 1, 2, 3. Uvědomte si, že pro každý ze zbývajících vrcholů 1, 2, 4, 5 a pro každé Tomem zadané číslo 1, 2, 3 může Jerry udělat tah, že figurka neskončí na vrcholech s čísly 3 a 6, takže nemůže prohrát.]

N4. Vyřešte úlohu pro $n = 4$. [Očíslujme vrcholy jako v úloze N3. Rozdělme si vrcholy, jež nejsou pastmi, do dvou skupin $A = \{2\}$ a $B = \{1, 3\}$. Pokud je figurka ve skupině A, Tom tahem 2 vyhraje. Pokud je figurka ve skupině B, vyhraje buď tahem 1, nebo ji dostane do skupiny A, kde vyhraje tahem 2. Pokud by neviděl pozici figurky, vyzkouší nejprve tah 2. Tímto tahem buď vyhraje, nebo bude figurka ve skupině B, kde zůstane i po tomto tahu. Tehdy mu stačí použít strategii pro skupinu B, tj. říci čísla 1, 2. Finální strategie v případě, že nevidí figurku, je tudíž 2, 1, 2.]

N5. Tom zvolí k dané hře (při které na hrací desku s n-úhelníkem vidí) jednoduchou strategii: v každém kroku řekne takové číslo menší než n, při kterém se následně figurka ocitne v pasti, posune-li ji Jerry proti směru chodu hodinových ručiček. Ukažte, že Tom zaručeně vyhraje v případě $n = 8$. [Vypisujte postupně polohy figurky od vítězného konce, a ukažte, že takto dostanete všechny možné výchozí polohy figurky. Dokážete objevit, která další n budou mít stejnou vlastnost?]

D1. Jak se změní odpověď v úloze, má-li Tom zakázanou konečnou množinu čísel, tj. nesmí je říci? [Odpověď se nezmění. Pokud Tom používá ve své strategii zakázané číslo a, stačí ho nahradit číslem $a + kn$ pro nějaké přirozené k. Jelikož je zakázáno konečně mnoho čísel, nějaké číslo tohoto tvaru zakázáno nebude. Takovou výměnu provedeme se všemi zakázanými čísly, která se mohou v jeho strategii vyskytnout.]

D2. Jak se změní odpověď, pokud Tom nevidí figurku a zároveň nezná číslo n? [Odpověď se nezmění.]

D3. Jak se změní odpověď v případě, že figurka je na začátku položena na nějakém konkrétním políčku?

D4. Čtyři poháry jsou umístěny do rohů čtvercového tácu. Každý je umístěn dnem vzhůru nebo dnem dolů. Slepá osoba je posazena před tác a má za úkol převracet poháry tak, aby byly všechny otočeny stejným směrem. Poháry jsou převraceny následujícím způsobem: V jednom tahu mohou být uchopeny libovolné dva poháry, přičemž osoba cítí jejich orientaci a může buď některý z nich otočit opačným směrem, nebo oba z nich, anebo žádný. Následně je tác otočen o celočíselný násobek úhlu 90°. Jak má osoba postupovat při převracení? [https://en.wikipedia.org/wiki/Four_glasses_puzzle]