Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je $2\,019$krát menší.*

(Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna čtyřmístná čísla, z nichž po vyškrtnutí prvního dvojčíslí dostaneme dvojmístné číslo, které je 69krát menší. [1725, 3450 a 5175. Hledané číslo je tvaru $10^2A + B$, kde dvojmístná čísla A, B splňují rovnici $10^2A + B = 69B$ neboli $25A = 17B$. Díky nesoudělnosti čísel 17 a 25 odtud plyne, že B je násobkem čísla 25.]

N2. Dokažte, že pokud ve čtyřmístném čísle vyškrtneme dvě z jeho posledních tří číslic, dostaneme číslo více než 50krát menší. [Původní číslo je tvaru $\overline{c\star\star\star}$, zmenšené je tvaru $\overline{c\star}$, takže první z nich je alespoň 10^3c, zatímco druhé číslo je menší než $10(c+1)$. Proto stačí ověřit nerovnost $10^3c \geqq 50 \cdot 10(c+1)$, ta je ovšem splněna pro každé $c \geqq 1$.]

D1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, pro něž platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D2. Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N. [56–C–II–4]

D3. Pro které racionální číslo $r > 1$ existuje nejvíce těch čtyřmístných čísel, z nichž vyškrtnutím prvního dvojčíslí dostaneme dvojmístné číslo, které je r-krát menší? [Pro $r = 101$. Podle označení z úlohy N1 hledáme takové r, pro které existuje největší počet dvojic A, B dvojmístných čísel splňujících rovnici $10^2A+B = rB$ neboli $10^2A = (r-1)B$. Číslo B je při daném r číslem A jednoznačně určeno, přitom $A \in \{10, 11, \ldots, 99\}$. Odtud plyne, že pro každé r je vhodných čísel nejvýše 90, přitom tento počet získáme, právě když pro každé dvojmístné A bude $B = 10^2A/(r-1)$ rovněž dvojmístné celé číslo. To je splněno pouze pro $r = 101$, kdy $B = A$, takže všech 90 vyhovujících čtyřmístných čísel je tvaru $\overline{abab}$.]

2. *V trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M střed přepony BC a N průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu B s odvěsnou AC. Úsečky AM a BN se protnou v bodě, který označíme K. Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníku BAK a čtyřúhelníku $CNKM$.*

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že libovolný trojúhelník je každou svou těžnicí rozdělen na dva menší trojúhelníky o stejném obsahu. [Dotyčné trojúhelníky mají shodnou výšku ke shodným základnám.]

N2. Dokažte, že libovolný trojúhelník je svými třemi těžnicemi rozdělen na šest menších trojúhelníků o stejném obsahu. [Pro trojúhelník ABC s těžnicemi AA_1,

BB_1, CC_1 a těžištěm T využijte rovnosti typu $S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$ a $S_{BTA_1} = S_{CTA_1}$, platné podle výsledku úlohy N1.]

N3. Odvoďte pravidlo o poměru, v jakém dělí osa vnitřního úhlu daného trojúhelníku jeho protější stranu: Osa úhlu BAC protne stranu BC trojúhelníku ABC v bodě P určeném úměrou $|PB| : |PC| = |AB| : |AC|$. [Ukažte, že oba poměry mají stejnou hodnotu jako poměr obsahů trojúhelníků ABP a ACP.]

D1. Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí $p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|$.

a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.

b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4. [65–C–I–4]

D2. V pravoúhlém lichoběžníku $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu A základny AB je bod K průsečíkem výšky CP lichoběžníku s jeho úhlopříčkou BD. Obsah čtyřúhelníku $APCD$ je polovinou obsahu lichoběžníku $ABCD$. Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník BCK. [65–C–II–3]

D3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD, přičemž $2|AB| = 3|CD|$.

a) Najděte bod P uvnitř lichoběžníku tak, aby obsahy trojúhelníků ABP a CDP byly v poměru $3 : 1$ a rovněž obsahy trojúhelníků BCP a DAP byly v poměru $3 : 1$.

b) Pro nalezený bod P určete postupný poměr obsahů trojúhelníků ABP, BCP, CDP a DAP. [64–C–II-3]

3. Úpravou *přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, připočteme k němu číslo* 1.

a) Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo 1.

b) Pro které z čísel $1, 2, \ldots, 10^6$ *budeme potřebovat největší počet úprav, než získáme číslo* 1*?* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech návodných úlohách se zabýváme *úpravou* ze soutěžní úlohy.

N1. Pro které jednociferné číslo je třeba provést největší počet jeho úprav, než získáme číslo 1? O kolik úprav půjde? [Číslo 9, sedm úprav.]

N2. Najděte nejmenší přirozené číslo, pro které je třeba provést 8, resp. 9 jeho úprav, než získáme číslo 1. [Číslo 18, resp. číslo 17.]

N3. Určete všechna přirozená čísla, se kterými je třeba provést pět úprav, než získáme číslo 1. [Čísla 5, 12, 14, 15 a 32. Vypisujte všechny možné postupy úprav „odzadu“, tj. od konečného čísla 1 k výchozímu číslu. Pro daný počet pěti úprav jsou tyto možnosti: $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 5$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 6 \leftarrow 12$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 7 \leftarrow 14$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 15$, $1 \leftarrow 2 \leftarrow 4 \leftarrow 8 \leftarrow 16 \leftarrow 32$.]

N4. Pro libovolná přirozená čísla k a p dokažte: Pokud všechna přirozená čísla nepřevyšující hodnotu k přejdou po nejvýše p úpravách v číslo 1, pak na totéž pro čísla nepřevyšující hodnotu $2k - 1$ stačí nejvýše $p + 2$ úprav. [Rozlište, zda je dané číslo n, $n \leqq 2k - 1$, sudé nebo liché — v prvním případě stačí nejvýše $p + 1$, ve druhém nejvýše $p + 2$ úprav.]

D1. Nechť l je pevné liché číslo větší než 1. Úpravou přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, přičteme k němu dané číslo l. Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo, které nepřevyšuje číslo l, přitom všechna další čísla nepřevyšují číslo $2l$ a periodicky se opakují. Na příkladu $l = 7$ se přesvědčte, že zřejmé opakování $l \to 2l \to l \to \ldots$ není jediné možné. [Využijte následujících poznatků: Sudé číslo se po jedné úpravě zmenší. Liché číslo větší než l se zmenší po dvou úpravách. Liché číslo, které nepřevyšuje l, se po jedné úpravě zvětší na sudé číslo nepřevyšující $2l$, takže po druhé úpravě se opět zmenší na číslo nepřevyšující l. Čísla v průběhu úprav se periodicky zacyklí, jakmile se v průběhu úprav objeví některé číslo podruhé. Pro $l = 7$ existují kromě $7 \to 14 \to 7$ ještě dva další cykly $1 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$, $3 \to 10 \to 5 \to$ $\to 12 \to 6 \to 3$ (protože jsme vypsali všechna čísla od 1 do 7, žádné další cykly neexistují).]

4. *Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu*

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

(Patrik Bak, Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

V úlohách N1–N4 i D1 jsou a, b nezáporná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$.

N1. Najděte nejmenší i největší možnou hodnotu jak součinu ab, tak součtu $a + b$. [$\min(ab) = 0$, $\max(ab) = 1/2$, $\min(a + b) = 1$, $\max(a + b) = \sqrt{2}$. Využijte nerovnost $(a - b)^2 \geqq 0$ a rovnost $(a + b)^2 = 1 + 2ab$.]

N2. Ukažte, že součet $a^4 + b^4 + ab + 1$ závisí jen na součinu ab. [Součet lze upravit do tvaru $2 + ab(1 - 2ab)$.]

N3. Vyjádřete, oč se výraz $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$ ze soutěžní úlohy liší od součtu $a^3 + b^3$. [$V - (a^3 + b^3) = 1/(a + b)$]

N4. Dokažte rovnost $\max(a^3 + b^3) = 1$. [Využijte nerovnosti $a^3 \leqq a^2$ a $b^3 \leqq b^2$.]

D1. Najděte největší možnou hodnotu podílu $P = ab/(a + b)$. [$\max P = \sqrt{2}/4$. Využijte rovnosti $2P = (a + b) - 1/(a + b)$ a faktu, že $\max(a + b) = \sqrt{2}$ (úloha N1).]

D2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí

$$0 \leqq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leqq |t - 1|. \qquad [67–B–I–2]$$

D3. Najděte všechna kladná reálná čísla t taková, že pro libovolné nezáporné reálné číslo x platí nerovnost

$$\frac{t}{x + 2} + \frac{x}{t(x + 1)} \leqq 1. \qquad [67–B–II–2]$$

D4. Určete všechna reálná čísla r taková, že nerovnost $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pro všechny dvojice reálných čísel a a b, která jsou větší nebo rovna r. [66–B–I–6]

D5. Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla $a \leqq b \leqq c$ platí:

$$(-a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqq 3. \qquad [66–C–II–4]$$

D6. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2+ab=a^2+b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2+ab \leqq ac+bc$. [63–C–II–3]

D7. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $ab+bc$, $bc+ca$, $ca+ab$ není větší než 8. [60–B–I–3]

5. *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD.* (Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Připomeňte si Thaletovu větu a obecnější poznatek o obvodových a středových úhlech v dané kružnici.

N2. V soutěžní úloze objevte tři čtveřice pojmenovaných bodů, které leží vždy na jedné kružnici.

D1. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [57–B–II–3]

D2. Je dán čtverec $ABCD$. Na kratším oblouku AB opsané mu kružnice zvolíme bod X. Průsečík úsečky XC se stranou AB označíme Y a průsečík úsečky XD s úhlopříčkou AC označíme Z. Ukažte, že $YZ \perp AC$. [Nalezněte skrytou čtveřici bodů, co leží na jedné kružnici.]

D3. Pomocí počítání velikostí úhlů dokažte, že výšky v ostroúhlém trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme postupně D a E paty výšek z vrcholů A a B, dále P průsečík úseček AD a BE a X průsečík CP a AB. Dokážeme, že přímka CP je kolmá na AB. Čtyřúhelníky $ABDE$ a $CDPE$ jsou tětivové, protože jejich vrcholy leží na Thaletových kružnicích s průměry AB a CP. Proto úhly BAD, BED, PCD mají všechny stejnou velikost $90^\circ - |\sphericalangle ABC|$. Úhel CXB, který dopočítáme ze známých velikostí zbývajících úhlů v trojúhelníku CXB, je tedy pravý.]

6. *Konečnou množinu přirozených čísel nazveme* pěknou*, jestliže k výpisu těchto čísel v desítkové soustavě potřebujeme sudý počet každé ze zastoupených číslic. Pěknými množinami jsou například $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$ a také prázdná množina. Určete, kolik je všech pěkných podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách se jedná o pěkné množiny ve smyslu soutěžní úlohy.

N1. Neznámá pěkná množina P obsahuje právě tato vícemístná čísla: 13, 21, 34, 55, 89. Najděte všechna jednomístná čísla, která patří do P. [Právě čísla 2, 4, 8 a 9, každá z ostatních číslic je totiž v daných pěti dvojmístných číslech zastoupena v sudém počtu exemplářů.]

N2. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}?$$

[$4^3 = 64$. Každá ze tří daných trojic čísel $\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}$ má v pěkné množině čtyři možná zastoupení: $\emptyset$, $\{\overline{cc}\}$, $\{\overline{c}, \overline{ccc}\}$ nebo $\{\overline{c}, \overline{cc}, \overline{ccc}\}$. Jiné řešení: každá z dotyčných pěkných množin je určena svými vícemístnými čísly, která mohou spolu vytvořit libovolnou z 2^6 podmnožin množiny $\{11, 22, 33, 111, 222, 333\}$.]

N3. Kterými konečnými množinami Q vícemístných čísel můžeme zaměnit množinu $\{13, 21, 34, 55, 89\}$ v zadání N1 tak, aby úloha měla řešení? [V zápisech všech čísel z Q musí být číslice 0 zastoupena v sudém počtu, a to je jediná podmínka na Q, neboť podle parit počtů zastoupení ostatních číslic 1 až 9 pak určíme, která z čísel 1 až 9 do kýžené pěkné množiny budou patřit a která ne.]

N4. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}?$$

[32. Dvojmístná čísla z každé dotyčné pěkné množiny mohou tvořit libovolnou z 2^5 podmnožin pětiprvkové množiny $\{11, 13, 15, 17, 19\}$.]

N5. Kolik pěkných podmnožin má množina

$$\{1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}?$$

[256. Čísla *větší než* 10 z každé dotyčné pěkné množiny mohou tvořit libovolnou z 2^8 podmnožin osmiprvkové množiny

$$\{11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30\}.$$

(Číslo 10 bude patřit do pěkné podmnožiny tehdy a jen tehdy, když tam bude patřit právě jedno z čísel 20 a 30.)]