Návody k domácí části I. kola kategorie C

1. *Neznámé číslo je dělitelné právě čtyřmi čísly z množiny* $\{6, 15, 20, 21, 70\}$. *Určete, kterými.* (Michal Rolínek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete pět přirozených čísel, jejichž součet je 20 a jejichž součin je 420. [Protože $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1 + 4 + 3 + 5 + 7 = 20$ a hledaná čísla, jež jsou násobky 5 a 7, musejí být jednociferná (součet ostatních tří čísel je aspoň 6), jsou dvě z hledaných čísel přímo čísla 5 a 7 a zbylá tři (ne nutně různá) leží v množině $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, přitom jejich součet je 8 a součin 12, takže jde o trojici 1, 3, 4.]

N2. Jisté přirozené číslo má právě čtyři dělitele, jejichž součet je 176. Určete toto číslo, víte-li, že součet všech jeho číslic je 12. [Hledané číslo n je dělitelné třemi a větší než 9, proto jeho čtyřmi děliteli jsou právě čísla $1 < 3 < n/3 < n$. Odtud vychází $n = 129$.]

D1. Dané celé číslo je dělitelné alespoň čtyřmi čísly z množiny $\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$. Dokažte, že je dělitelné každým z nich. [Všimněme si, že $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ a $15 = 3 \cdot 5$. Proto je-li dotyčné číslo dělitelné všemi třemi čísly 2, 3 a 5, je dělitelné i všemi zbylými čísly 6, 10 a 15. V opačném případě by bylo dělitelné nejvýše dvěma z čísel 2, 3 a 5, a proto alespoň dvěma z čísel 6, 10 a 15, a tedy i každým z prvočísel 2, 3 a 5, a to je spor.]

2. *Uvnitř strany* AB *trojúhelníku* ABC *jsou dány body* D *a* E *tak, že* $|AD| = |DE| = |EB|$. *Body* A *a* B *jsou po řadě středy úseček* CF *a* CG. *Přímka* CD *protíná přímku* FB *v bodě* I *a přímka* CE *protíná přímku* AG *v bodě* J. *Dokažte, že průsečík přímek* AI *a* BJ *leží na přímce* FG. (Pavel Calábek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť K, L, M, N jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. *Varignonův* rovnoběžník). [Využijte vlastnosti střední příčky v trojúhelníku: úsečky KL a MN jsou středními příčkami po řadě v trojúhelnících ABC a CDA.]

N2. Nechť D je střed strany AB trojúhelníku ABC a E bod jeho strany AC, pro který platí $|AE| = 2|CE|$. Označme F průsečík přímek BE a CD. Dokažte, že platí $|BE| = 4|EF|$. [Označme M střed úsečky AE. Úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku CMD a úsečka MD je střední příčkou v trojúhelníku ABE.]

D1. Nechť E, F jsou po řadě středy stran AB, CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že platí $|BC| + |AD| \geqq 2|EF|$. [Uvažujte střed M úhlopříčky AC a úsečky EM a FM, které jsou středními příčkami v trojúhelnících ABC a ACD.]

3. *Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro reálná čísla se součtem 3 platí navíc $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Jaké hodnoty může nabývat výraz $ab+bc+ca$? [Jelikož $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, je nutně $ab + bc + ca = 2$. Hodnota je dosažitelná díky trojici $(2, 1, 0)$.]

N2. Nezáporná reálná čísla a, b, c jsou všechna nejvýše rovna 1. Dokažte, že $3abc \leqq a + b + c$. Kdy nastane rovnost? [Upravíme na $a(1 - bc) + b(1 - ac) + c(1 - ab) \geqq 0$, výrazy v závorkách jsou nezáporné. Rovnost nastane, právě když buď $a = b = c = 0$, nebo $a = b = c = 1$.]

D1. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$. Kdy nastane rovnost? [Nerovnost je ekvivalentní s $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$, která jistě platí. Rovnost nastane jedině v případě $a = b = c$.]

D2. Reálná čísla a, b, c mají součet 3. Dokažte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kdy nastane rovnost? [Plyne z rovnosti $9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ a z předešlé úlohy. Rovnost nastane jedině v případě $a = b = c = 1$.]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 \geqq 4y(x + z),$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. [Anulujte pravou stranu dané nerovnosti a upravte ji následně do tvaru $(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) \geqq 0$, kde na levé straně je nezáporný součet $(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2$. Rovnost zde nastane, právě když platí $(x, y, z) = (4c, 2c, c)$, kde c je libovolné reálné číslo.]

D4. Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost

$$3a^2 + 2bc > 2ab + 2ac.$$

[Danou nerovnost upravte na tvar $a^2 - (b-c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 > 0$ a rozdíl prvních dvou druhých mocnin nahraďte příslušným součinem.]

4. *Každé pole tabulky 2×13 obarvíme právě jednou ze čtyř barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? (Za sousední považujeme právě ta pole tabulky, která mají společnou stranu.)*

(Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kolika způsoby lze obarvit pole tabulky 2×3 dvěma různými barvami tak, že každé pole je obarveno jednou barvou? [Pro každé pole tabulky existují vždy 2 možnosti obarvení, pro celou tabulku máme tedy $2^6 = 64$ možností.]

N2. Každé pole tabulky 13×13 obarvíme právě jednou ze dvou barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? [2 možnosti.]

N3. Každé pole tabulky 2×2 obarvíme právě jednou ze tří barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? [Pro obarvení prvních dvou sousedních polí máme 6 možností, pro zbývající pole pak už jen tři možnosti, celkem $6 \cdot 3 = 18$ možností.]

D1. Určete, kolika způsoby lze obarvit pole tabulky 3×3 třemi různými barvami (každé pole právě jednou barvou) tak, aby v každém řádku a každém sloupci byly použity všechny tři barvy. [Existuje 12 možností. První sloupec obarvíme celkem $3 \cdot 2 = 6$ způsoby, pro druhý sloupec máme s ohledem na podmínky úlohy pouze 2 možnosti. Obarvení polí posledního, třetího sloupce je tím už jednoznačně určeno. Celkově tak máme $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ možností.]

5. *Nechť α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω značí po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H konvexního osmiúhelníku $ABCDEFGH$, v němž platí*

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme dále K, L, M, N po řadě středy úhlopříček AD, CF, EH, GB. Dokažte, že přímky KM a LN jsou navzájem kolmé. (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro libovolné přirozené $n \geqq 3$ odvoďte vzorec pro součet s_n velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku. [$s_n = (n-2) \cdot 180°$]

N2. V rovině je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran AB, CD a EF se protínají v jednom společném bodě. [Průsečíky přímek BC, DE a FA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Osy jeho vnitřních úhlů jsou totožné s osami úseček AB, CD a EF.]

N3. V rovině je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, EA a osa vnitřního úhlu při vrcholu D se protínají v jednom společném bodě. [Průsečíky přímek AB, CD a DE tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku s hlavním vrcholem D. Osy vnitřních úhlů při jeho základně jsou totožné s osami úseček BC a EA.]

6. *Najděte všechna trojmístná čísla n s třemi různými nenulovými číslicemi, která jsou dělitelná součtem všech tří dvojmístných čísel, jež dostaneme, když v původním čísle vyškrtneme vždy jednu číslici.* (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna trojmístná čísla, která jsou jedenáctkrát větší než jejich ciferný součet. [198, z rovnosti $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$ upravené do tvaru $89a = b + 10c$ plyne $a = 1$, takže $b = 9$ a $c = 8$.]

N2. Určete všechna trojmístná čísla, která jsou sedmkrát větší než dvojmístné číslo, které vznikne z daného čísla vyškrtnutím jeho prostřední číslice. [105, z rovnosti $100a + 10b + c = 7(10a + c)$ upravené do tvaru $5(3a + b) = 3c$ plyne $c = 5$.]

N3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, pro něž platí $\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 16 \cdot \overline{cd}$. [65–C–S–1]

D1. Určete největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo. [67–C–S–1]

D2. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. [67–C–I–1]