68. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Najděte všechna prvočísla p, q taková, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má alespoň jeden celočíselný kořen. (*Patrik Bak*)

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$. Na polopřímkách AB, AC leží po řadě body D, E takové, že $|AD| = |AC|$ a $|AE| = |AB|$. Sestrojme v bodě D kolmici k AD, v bodě E kolmici k AE a jejich průsečík označme F. Dokažte, že $AF \perp BC$. (*Patrik Bak*)

3. *Úpravou* přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, připočteme k němu číslo 3. Určete všechna přirozená čísla, ze kterých dostaneme po několika úpravách za sebou číslo 1. (*Ján Mazák*)

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 11. prosince 2018

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Označme x_1, x_2 ne nutně různé kořeny dané rovnice. Podle Viètových vzorců platí $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1x_2 = q$. Z prvního z těchto vztahů vidíme, že pokud je jeden z kořenů rovnice celočíselný, musí být celočíselný i ten druhý. Obě čísla x_1, x_2 jsou tedy celá a jejich součin je roven prvočíslu q. To se dá rozložit na součin dvou celých čísel jen jako $q \cdot 1$ nebo $(-q) \cdot (-1)$. V prvním případě je vztah $x_1 + x_2 = -p$ ekvivalentní s rovnicí $p + q + 1 = 0$, v druhém s rovnicí $p - q = 1$. První rovnice nemá řešení, protože na její levé straně je kladné číslo. Druhá rovnice má jediné řešení $(p, q) = (3, 2)$, neboť $p > q$ a prvočísla p, q mají nutně různou paritu, z čehož hned plyne $q = 2$, a tedy $p = 3$. Této dvojici odpovídá rovnice $x^2 + 3x + 2 = 0$, která má celočíselné kořeny -1 a -2. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Zkouška v tomto řešení není nutná. Pokud totiž čísla x_1, x_2 splňují vztahy $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1x_2 = q$, je dobře známo, že jde o kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$ (plyne to z rozkladu $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$).

Jiné řešení. Označme a celočíselný kořen dané rovnice. Platí tedy $a^2 + pa + q = 0$. Vidíme, že a dělí první dva sčítance na levé straně, proto nutně dělí i q. Protože q je prvočíslo, je $a \in \{\pm 1, \pm q\}$. Tyto čtyři možnosti postupně rozebereme:

- ▷ Pro $a = -1$ máme $p - q = 1$, takže $(p, q) = (3, 2)$.
- ▷ Pro $a = 1$ máme $p + q + 1 = 0$, což nemůže platit.
- ▷ Pro $a = q$ máme $q^2 + pq + q = 0$, což po vydělení kladným q vede na $q + p + 1 = 0$. Stejnou rovnici jsme už dostali předtím.
- ▷ Pro $a = -q$ máme $q^2 - pq + q = 0$ a po vydělení q dostáváme $p - q = 1$, což je rovnice, kterou jsme již řešili.

Jediné možné řešení je $(p, q) = (3, 2)$. Snadno se přesvědčíme, že tato dvojice opravdu vyhovuje zadání.

Jiné řešení. Aby měla rovnice $x^2 + px + q = 0$ celočíselný kořen, musí být její diskriminant $D = p^2 - 4q$ nutně druhou mocninou nezáporného celého čísla — označme je a. Potom platí $p^2 - 4q = a^2$, což můžeme napsat jako $(p - a)(p + a) = 4q$. Jelikož $4q > 0$ a $p + a > 0$, je nutně $p - a > 0$. Číslo $4q$ je tedy rozloženo na součin dvou kladných celých čísel $p - a \leqq p + a$. Tato dvě čísla mají přitom stejnou paritu, protože jejich součet $2p$ je sudý. Jelikož i jejich součin $4q$ je sudý, jsou nutně obě sudá. Pokud označíme $p - a = 2k$ a $p + a = 2l$, bude $0 < k \leqq l$ a $kl = q$, takže nutně $k = 1$ a $l = q$. Platí tedy $p - a = 2$ a $p + a = 2q$, z čehož odvodíme rovnici $q = p - 1$. Dále postupujeme jako v předešlých řešeních.

Poznámka. Po napsání rovnice $(p-a)(p+a) = 4q$ je možné postupovat i přímočařeji: Nejprve vypíšeme všechny rozklady čísla $4q$ na součin dvou kladných čísel, a sice $1 \cdot 4q$, $2 \cdot 2q$, $4 \cdot q$ (v případě $q = 2$ jsou poslední dva rozklady totožné), a rozebereme jednotlivé případy:

- ▷ Pro rozklad $1 \cdot 4q$ máme díky nerovnosti $1 < 4q$ soustavu $p - a = 1$, $p + a = 4q$. Po sečtení obou rovnic dostáváme $2p = 4q + 1$, což nemůže nastat, neboť levá strana rovnice je sudá, zatímco pravá je lichá.
- ▷ Podobně pro rozklad $2 \cdot 2q$ máme z $2 < 2q$ soustavu $p - a = 2$, $p + a = 2q$, což po sečtení rovnic a dělení dvěma vede na známou rovnici $p = q + 1$.
- ▷ V případě rozkladu $4 \cdot q$ nemusíme řešit případ $q = 2$, jelikož ten je zahrnut v předchozím případě. Pro $q = 3$ máme $p - a = 3$, $p + a = 4$, což nemá celočíselné řešení.

Pro $q \geqq 5$ pak máme $p - a = 4$ a $p + a = q$, což po sečtení vede na $2p = 4 + q$. Levá strana rovnice je sudá, a tedy i pravá, takže i prvočíslo q je sudé, co nemůže nastat, neboť jsme předpokládali $q \geqq 5$.

Jiné řešení. Označme a celočíselný kořen dané rovnice. Platí tedy $a^2 + pa + q = 0$. Rozbereme případy podle parity prvočísel p a q:

▷ Pokud jsou obě p, q lichá, nemůže být číslo a liché, jinak by bylo $a^2 + pa + q$ liché. Proto je a sudé, a tedy $a^2 + pa$ je sudé, takže nutně i q je sudé, což je spor.

▷ Pokud $p = 2$, dostáváme rovnici $a^2 + 2a + q = 0$, kterou napíšeme jako $(a + 1)^2 + (q - 1) = 0$. Vidíme, že levá strana rovnice je kladná, proto v tomto případě nemáme řešení.

▷ Pokud $q = 2$, máme $a^2 + pa + 2 = 0$. Vidíme, že a je nutně dělitelem čísla 2, což vede na případy $a \in \{-1, -2, 1, 2\}$. Přezkoumáním jednotlivých případů najdeme jedinou možnost $p = 3$. Zkouškou se přesvědčíme, že dvojice $(p, q) = (3, 2)$ opravdu vyhovuje.

Poznámka. Toto řešení je podobné druhému řešení, avšak nedostává se explicitně k rovnicím $p - q = 1$ resp. $p + q + 1 = 0$. Některé jeho části se dají modifikovat tak, že se přiblíží k druhému řešení: Například v druhém případě lze namísto úpravy na čtverec použít úvahu o dělitelnosti pro nalezení $a \in \{-1, 1, q, -q\}$, což vede na čtyři rovnice o jedné neznámé q.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Obecné poznámky:

1. Při řešení rovnice $p - q = 1$ akceptujte i konstatování, že jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3, případně jiné ekvivalentní formulace, jako například že každá jiná dvě prvočísla se liší alespoň o 2. Neakceptujte však, pokud někdo bez jakéhokoli zdůvodnění napíše, že z této rovnice nutně plyne $p = 3$ a $q = 2$, aniž připomene, že jde o dvě prvočísla.
2. Pokud se řešitel nijak nezmíní o zkoušce, resp. zpětně nevyřeší rovnici $x^2 + 3x + 2 = 0$, strhněte bod. Pokud korektním způsobem zdůvodní, že zkouška není nutná (což se dá v prvním řešení), tak bod nestrhávejte.
3. Za uhodnutí řešení udělte 1 bod.
4. Pokud řešitel přezkoumá konečně mnoho dvojic (p, q), může dostat maximálně 1 bod (za tu dvojici, která je řešením).
5. Dílčí body za jednotlivá řešení se nesčítají.

Řešení 1.

▷ [1 bod] Zapsání obou Viètových vzorců.

▷ [1 bod] Zdůvodnění, že oba ne nutně různé kořeny jsou celočíselné.

▷ [1 bod] Vypsání možností pro $\{x_1, x_2\}$ na základě vztahu $x_1 x_2 = q$.

▷ [1 bod] Vyšetření případu $\{x_1, x_2\} = \{q, 1\}$ vedoucího na rovnici $p + q + 1 = 0$.

▷ [1 bod] Vyšetření případu $\{x_1, x_2\} = \{-q, -1\}$ vedoucího na rovnici $p - q = 1$ (viz první obecnou poznámku).

▷ [1 bod] Ověření, že dvojice $p = 3$, $q = 2$ opravdu vyhovuje (viz druhou obecnou poznámku).

Neúplné řešení: V případě, že řešitel zapomene na jeden z možných rozkladů $x_1 x_2$, udělte nejvýše 4 body.

Řešení 2.

▷ [2 body] Odvození, že daný celočíselný kořen je dělitelem q.

▷ [1 bod] Vypsání všech možností pro hodnoty tohoto dělitele.

▷ [1 bod] Vyšetření případů $a = -1$ resp. $a = -q$ (vedoucích na stejnou rovnici $p - q = 1$, viz první obecnou poznámku).

▷ [1 bod] Vyšetření případů $a = 1$ resp. $a = q$ (vedoucích na stejnou rovnici $p + q + 1 = 0$).

▷ [1 bod] Ověření, že dvojice $p = 3$, $q = 2$ opravdu vyhovuje (viz druhou obecnou poznámku).

Neúplné řešení: V případě, že řešitel zapomene vyšetřit některé dělitele čísla q (například záporné), udělte nejvýše 4 body.

Řešení 3.

▷ [1 bod] Uvědomění si, že diskriminant musí být druhá mocnina celého čísla (stačí konstatování, nebo napsání rovnice $p^2 - 4q = a^2$).

▷ [1 bod] Přepsání zkoumané rovnice do tvaru $(p - a)(p + a) = 4q$.

▷ [1 bod] Vypsání všech možných rozkladů omezených případnými úvahami jako rozlišení, který z činitelů je větší; uvědomění si, že stačí uvažovat kladné činitele… (viz poznámku).

- ▷ [1 bod] Vyřešení rozkladu $p-a=2$, $p+a=2q$, který vede na rovnici $p-q=1$ (viz první obecnou poznámku).
- ▷ [1 bod] Vyloučení všech ostatních rozkladů. Tento bod je implicitně udělen i v případě, kdy se řešitel šikovně vyhne jakýmkoli dalším rozkladům podobně jako ve vzorovém řešení.
- ▷ [1 bod] Ověření, že dvojice $p=3$, $q=2$ opravdu vyhovuje (viz druhou obecnou poznámku).

Neúplné řešení.

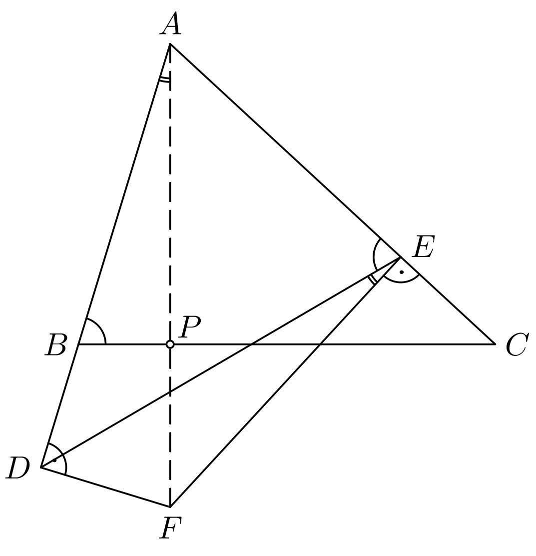
- ▷ V případě, že řešitel vypíše všechny rozklady $4q$, ale nezdůvodní (nebo nekorektně vyšetří) pořadí činitelů, strhněte nejvýše 1 bod. Pokud však neuvede všechny rozklady $4q$, udělte nejvýše 4 body.

Řešení 4.

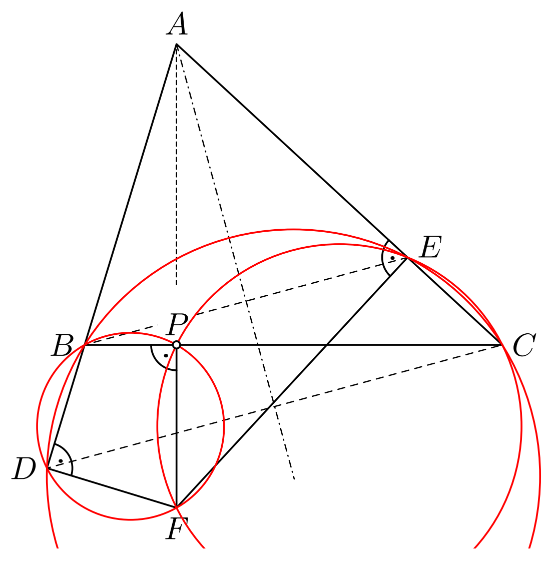
- ▷ [2 body] Úplné vyřešení případu, kdy p, q jsou lichá. Při menší chybě strhněte 1 bod.
- ▷ [1 bod] Vyřešení případu $p=2$, např. pomocí kladnosti jako ve vzorovém řešení nebo dělitelnosti (viz poznámku).
- ▷ [2 body] Vyřešení případu $q=2$. Za menší chyby (např. zapomenutí dělitelů) strhněte 1 bod.
- ▷ [1 bod] Ověření, že dvojice $p=3$, $q=2$ opravdu vyhovuje (viz druhou obecnou poznámku).

2. Z předpokladu $|AB|<|AC|$ vyplývá, že bod D leží na polopřímce opačné k BA, zatímco bod E leží uvnitř úsečky AC. Trojúhelníky ABC, AED jsou shodné podle věty *sus*, neboť se shodují v úhlu při vrcholu A a $|AB|=|AE|$ a $|AC|=|AD|$, jak plyne z definice bodů D a E. Z této shodnosti máme $|\sphericalangle AED|=|\sphericalangle ABC|=\beta<90^\circ$, neboť trojúhelník ABC je dle předpokladu ostroúhlý. To díky rovnosti $|\sphericalangle AEF|=90^\circ$ znamená, že $|\sphericalangle DEF|=90^\circ-\beta$ (obr. 1). Čtyřúhelník $DFEA$ je tětivový, protože oba jeho úhly při vrcholech D a E jsou pravé. Pro obvodové úhly nad tětivou DF tak máme $|\sphericalangle DAF|=|\sphericalangle DEF|=90^\circ-\beta$. Označíme-li P průsečík AF a BC, bude v trojúhelníku ABP platit $|\sphericalangle PBA|=\beta$ a $|\sphericalangle BAP|=|\sphericalangle DAF|=90^\circ-\beta$, takže $|\sphericalangle APB|=90^\circ$ neboli $AF\perp BC$.

Poznámka. Řešení se dá různým způsobem modifikovat předefinováním bodů, např. tak, že bod F' definujeme jako průsečík kolmice z A na BC a D na AD, a pomocí úhlů dokážeme, že $AE\perp EF'$. Takové předefinování je u podobných úloh často nezbytné — uvedené řešení však ukazuje, že v tomto případě tomu tak není.



Obr. 1

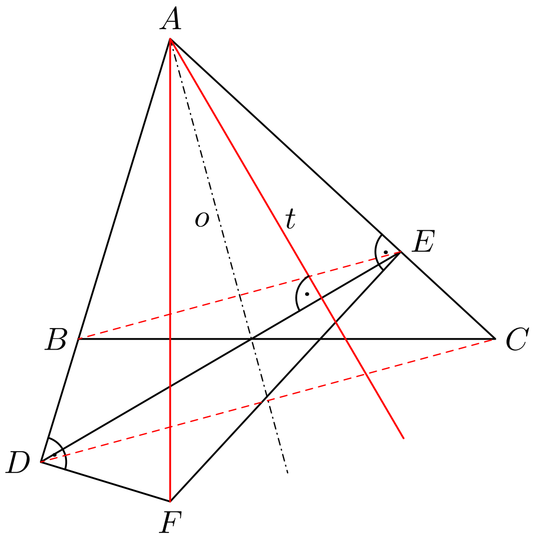


Obr. 2

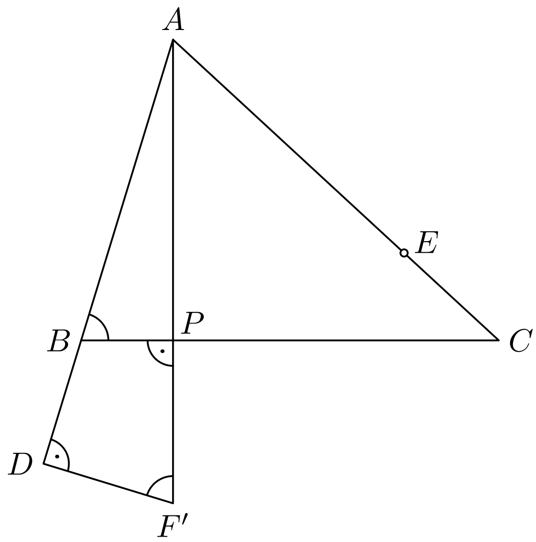
Jiné řešení. Označme P kolmý průmět bodu F na BC. Konvexní čtyřúhelníky $BDFP$ a $CEPF$ jsou tětivové díky pravým úhlům při vrcholech D, P a E. Tětivový je i čtyřúhelník $BDCE$ (obr. 2), neboť jde o rovnoramenný lichoběžník, a to z důvodu, že osy jeho stran BE a CD splývají s osou úhlu BAC. Chordály dvojic kružnic opsaných čtyřúhelníkům $BDFP$, $CEPF$ a $BDCE$ jsou přímky BD, CE, PF, takže procházejí jedním bodem, což znamená, že body A, P, F jsou kolineární, odkud už plyne $AF\perp BC$.

Poznámka. Abychom se vyhnuli pojmu *chordála*, můžeme uvedený postup modifikovat následovně: Označme P' kolmý průmět A na BC a F' průsečík AP' a kolmice z D na AD. Body B, D, F', P' leží díky pravým úhlům na kružnici a na kružnici, jak už víme, leží i body B, C, D, E. Pro mocnost bodu A tak máme $|AP'| \cdot |AF'| = |AB| \cdot |AD| = |AE| \cdot |AC|$, což znamená, že i body P', F', E, C leží na kružnici, takže z $|\sphericalangle F'P'C| = 90°$ dostáváme $|\sphericalangle F'EC| = 90°$, odkud již plyne $F = F'$ a $P' = P$.

Jiné řešení. Čtyřúhelník $ADFE$ má pravé úhly při vrcholech D, E, takže jeho vrcholy leží na kružnici s průměrem AF, který tudíž prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ADE. Označme t kolmici k přímce DE procházející bodem A (obr. 3). Podle úlohy D4 k 2. úloze domácího kola dostáváme, že přímky AF a t jsou souměrně sdružené podle osy o úhlu BAC (jsou vzhledem k tomuto úhlu izogonální). Přímka DE se přitom v této osové souměrnosti zobrazuje na přímku CB, takže z $t \perp DE$ hned dostáváme $AF \perp BC$.



Obr. 3



Obr. 4

Jiné řešení. Označme P kolmý průmět vrcholu A na stranu BC a F' průsečík polopřímky AP s kolmicí z bodu D na AD (obr. 4). Ve čtyřúhelníku $DBPF'$ jsou úhly při vrcholech D a P pravé a $|\sphericalangle DBP| = 180° - \beta$, takže $|\sphericalangle PF'D| = |\sphericalangle AF'D| = \beta$. Z pravoúhlého trojúhelníku $AF'D$ tak máme $|AF'| = |AD|/\sin\beta = b/\sin\beta$. Pokud definujeme F'' jako průsečík polopřímky AP s kolmicí z E na AE, dostaneme obdobně $|AF''| = c/\sin\gamma$. Ze sinové věty pro trojúhelník ABC však máme $b/\sin\beta = c/\sin\gamma$, takže $|AF'| = |AF''|$. Protože polopřímky AF' a AF'' jsou totožné, je nutně $F' = F'' = F$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Obecné poznámky:

1. Pokud chybí slovní popis polohy bodů D a E, body nestrhávejte.
2. V případě řešení používajícího analytickou geometrii udělte 6 bodů, pokud je správné, a 0 bodů v případě, že je chybné nebo nedokončené.
3. Dílčí body za jednotlivá řešení se nesčítají.

Řešení 1.

- ▷ [1 bod] Za důkaz shodnosti trojúhelníků ABC a AED.
- ▷ [1 bod] Za důkaz tětivovosti čtyřúhelníku $ADFE$.
- ▷ [1 bod] Za vyjádření velikosti úhlu DAF (či DFA) pomocí úhlu β, nebo úhlu EAF (či EFA) pomocí úhlu γ.
- ▷ [2 body] Za využití rovnosti obvodových úhlů v kružnici nad průměrem AF.

▷ [1 bod] Za dokončení řešení, tj. výpočet potvrzující pravý úhel při bodu P.

V případě, že řešitel nově vymezí bod F (viz poznámku k 1. řešení), je třeba uzpůsobit schéma jiné definici.

Neúplné řešení: Udělte nejvýše 3 body (první body zmíněné v bodovacím schématu).

Řešení 2.

▷ [1 bod] Za důkaz, že body B, C, D, E leží na kružnici (např. konstatováním, že tvoří rovnoramenný lichoběžník).

▷ [2 body] Za důkaz, že body D, F, P, B resp. C, F, P, E leží na kružnici. Tyto body udělte, jen když je jasné, že bod P je definován jako kolmý průmět bodu F na BC. V případě zmínky pouze jedné z těchto čtveřic udělte 1 bod.

▷ [3 body] Za dokončení řešení, tj. použití chordál tří kružnic.

V případě, že řešitel nově vymezí bod F (viz poznámku k 2. řešení), je třeba uzpůsobit schéma tomuto předefinování.

Neúplné řešení: Udělte nejvýše 3 body (první body zmíněné v bodovacím schématu).

Řešení 3.

▷ [1 bod] Za tvrzení, že body D, E jsou obrazy bodů C, B v osové souměrnosti podle o.

▷ [2 body] Za explicitní uvažování přímky t, tj. kolmice z A na DE.

▷ [3 body] Za dokončení řešení, tj. použití tvrzení o izogonalitě AF a t v kombinaci se souměrnou sdružeností přímek DE a BC.

Neúplné řešení: Udělte nejvýše 3 body (první body zmíněné v bodovacím schématu).

Řešení 4.

▷ [2 body] Za vyjádření velikosti úsečky AF' pouze pomocí prvků trojúhelníku ABC, přičemž musí být jasné, že bod F byl předefinován na F' a jakým způsobem.

▷ [4 body] Za dokončení řešení, tj. další výpočty vedoucí k důkazu, že $F' = F$ (viz vzorové řešení).

Neúplné řešení: Udělte nejvýše 2 body zmíněné v bodovacím schématu.

3. Nechť $a > 1$ je přirozené číslo. Pokud je sudé, dostaneme provedením úpravy $\frac{1}{2}a$. Pokud je liché, dostaneme po úpravě $a + 3$, což je sudé číslo, takže v dalším kroku dostaneme $\frac{1}{2}(a + 3)$. Díky předpokladu $a > 1$ platí $\frac{1}{2}a < a$, a pokud je $a > 3$, bude i $\frac{1}{2}(a+3) < a$. To dokazuje, že každé číslo $a > 1$ kromě $a = 3$ se po nejvýše dvou úpravách zmenší. Z každého čísla většího než 1 tedy po konečném počtu kroků dostaneme 1 nebo 3. Z čísla 1 dostaneme postupně 4, 2 a opět 1, z čísla 3 nejdříve 6 a pak opět 3. Shrnutím docházíme k závěru, že k jednomu ze dvou „zacyklení“ z předchozí věty nakonec dojde pro každé výchozí číslo $a \geqq 1$.

Dále si všimněme, že naše úprava zachovává dělitelnost číslem 3. Protože z čísla a dostáváme buď $a + 3$, nebo $\frac{1}{2}a$, je číslo po úpravě dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelné číslo před úpravou. Odtud hned plyne, že pokud jsme na začátku měli číslo dělitelné třemi, tak se tato dělitelnost třemi zachová, takže nikdy nemůžeme dostat 1. Ve skutečnosti se (podle prvního odstavce) dostaneme k číslu 3.

Pokud naopak na začátku máme číslo, jež třemi dělitelné není, tak nemůžeme dojít k číslu 3, proto dojdeme k číslu 1.

Závěr je, že vyhovují všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná třemi.

Poznámka 1. Řešení můžeme formalizovat pomocí matematické indukce. Chceme dokázat, že 1 lze dostat právě z čísel nedělitelných třemi. Nejprve tvrzení ověříme pro 2 a 3. Nechť $n > 3$, budeme předpokládat, že tvrzení platí pro všechna čísla menší než n. Po nejvýše dvou krocích dostaneme číslo menší než n, které je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelné n, takže použitím indukčního předpokladu důkaz dokončíme.

Poznámka 2. Zájemcům doporučujeme podívat se na 1. úlohu z MMO 2017[1], která se této úloze velmi podobá.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Úplné řešení:

▷ [2 body] Důkaz, že každé číslo $a > 1$ kromě $a = 3$ se po nejvýše dvou krocích zmenší. (1)

[1] `http://www.matematickaolympiada.cz/media/3528728/mmo58.pdf`

- ▷ [1 bod] Konstatování, že v důsledku (1) se každé číslo po konečném počtu kroků změní na 1 nebo 3. (2)
- ▷ [1 bod] Důkaz, že úprava čísla zachovává dělitelnost třemi neboli že číslo před úpravou je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelné číslo po úpravě. (3)
  Tolerujte, je-li tato ekvivalence zapsána pouze jako implikace.
- ▷ [1 bod] Zmínka, že v důsledku (3) jsme číslo 3 mohli získat pouze z čísla dělitelného třemi. (4)
- ▷ [1 bod] Důkaz pomocí (2) a (4), že z čísel nedělitelných třemi vždy dostaneme 1.
  Neúplné řešení:
- ▷ Za prověření konečného počtu čísel nedávejte žádný bod.
- ▷ Pokud řešitel napíše argument typu „čísla se postupně zmenšují“, udělte 2 body pouze v případě, kdy jeho vyjádření explicitně obsahuje, že se tak děje po nejvýše dvou krocích – jinak udělte jen 1 bod.
- ▷ Pokud řešitel neověří, že pro $a = 1$ dostane po dvou krocích opět číslo 1, body nestrhávejte.
- ▷ Za správnou odpověď jako nezdůvodněnou hypotézu udělte 1 bod.
- ▷ Částečným řešením, která nijak nevyužívají dělitelnost třemi, udělte nejvýše 3 body (jak je zmíněno v předešlých bodech).