68. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Na tabuli je napsáno kladné celé číslo n. V jednom kroku smíme číslo z tabule smazat a napsat místo něj buď jeho dvojnásobek, nebo jeho dvojnásobek zvětšený o 1. Pro kolik počátečních čísel n různých od 2 019 můžeme dosáhnout toho, že se po konečně mnoha krocích číslo 2 019 na tabuli objeví? (*Josef Tkadlec*)

2. Najděte všechna trojmístná čísla s touto vlastností: vyškrtneme-li v čísle jeho prostřední číslici a vzniklé dvojmístné číslo vynásobíme druhou mocninou vyškrtnuté číslice, dostaneme opět původní trojmístné číslo. (*Tomáš Jurík*)

3. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné. (*Šárka Gergelitsová*)

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

v úterý 29. ledna 2019

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

68. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. V jednom kroku aktuální přirozené číslo k zvětšíme buď na sudé číslo $m = 2k$, nebo na liché číslo $m = 2k + 1$. Podle parity nového čísla m tak můžeme rekonstruovat předchozí číslo k: buď $k = m/2$, nebo $k = (m - 1)/2$ — podle toho, zda m je sudé či liché.

Liché číslo 2 019 se tedy na tabuli objeví jedině po čísle $(2\,019 - 1)/2 = 1\,009$. Protože je to opět číslo liché, po dvou krocích se dostaneme k cílovému číslu 2 019 pouze z čísla $(1\,009 - 1)/2 = 504$. To je číslo sudé, takže po třech krocích dostaneme 2 019 jen z čísla $504 : 2 = 252$, atd. Celý postup určování všech vyhovujících čísel od konečného 2 019 vede k následujícímu výsledku:

$$2\,019 \leftarrow 1\,009 \leftarrow 504 \leftarrow 252 \leftarrow 126 \leftarrow 63 \leftarrow 31 \leftarrow 15 \leftarrow 7 \leftarrow 3 \leftarrow 1.$$

(Číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, takže dále nepokračujeme.)

Odpověď. Takových počátečních hodnot čísla n je deset (jsou to 1, 3, 7, 15, 31, 63, 126, 252, 504 a 1 009).

Jiné řešení. Budeme-li čísla na tabuli zapisovat ve dvojkové soustavě, spočívá každá úprava aktuálního čísla n v tom, že ho vůbec nemusíme mazat, nýbrž pouze k jeho zápisu připsat zprava buď nulu (změna n na $2n$), nebo jedničku (změna n na $2n + 1$). Číslo 2 019 tedy dostaneme po určitém počtu kroků právě z takových čísel, jejichž dvojkový zápis je tvořen skupinou několika prvních číslic dvojkového zápisu čísla 2 019. Protože $2^{10} = 1\,024 < 2\,019 < 2\,048 = 2^{11}$, má dvojkový zápis čísla 2 019 právě 11 číslic, takže existuje celkem 10 počátečních čísel n, z nichž po jednom či více krocích dostaneme číslo 2 019. (Nejmenší z těchto čísel je číslo 1, které odpovídá první číslici dvojkového zápisu čísla 2 019, na ostatních devět čísel se zadání úlohy neptá.)

Poznámka. Samotný zápis čísla 2019 v dvojkové soustavě nás nezajímá, ostatně jej obvykle hledáme právě posloupností úprav popsanou v prvním řešení. Tak dvojkový zápis 11111100011 čísla 2 019 dostaneme, když v získané skupině čísel $1, 3, 7, \ldots, 1\,009$, 2 019 zaměníme každé liché číslo jedničkou a každé sudé číslo nulou.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za obecné zdůvodnění, že každé předchozí číslo je určeno číslem následujícím, 1 bod za nalezení všech čísel až po jednotku a 1 bod za formulaci správného závěru.

Obecný popis z prvního odstavce řešení není nutný (stejně jako závěrečná poznámka o nejmenším přirozeném čísle 1), řešitel může zpětný postup rovnou začít určením čísla 1 009 z čísla 2 009 a pokračovat dále. Pokud však při postupných výpočtech čísel udělá numerickou chybu, více než 4 body neudělujte. Pokud učiní více chyb, dejte nejvýše 3 body. Za řešení, která našla 1009, ale nepokračovala v hledání dalších čísel, udělte 1 bod.

V případě druhého řešení dejte po 1 bodu za popis chování operace $\times 2$ a za popis chování operace $\times 2 + 1$ ve dvojkové soustavě. Další 2 body za vysvětlení, která čísla odpovídají hledaným, 1 bod za nalezení počtu číslic čísla 2019 ve dvojkové soustavě (buď odhadem nebo ručním převodem) a konečně 1 bod za samotný závěr.

2. Trojmístné číslo $n = \overline{abc}$ má požadovanou vlastnost, právě když jeho číslice a, b, c splňují rovnici

$$100a + 10b + c = (10a + c)b^2. \tag{1}$$

Protože číslice b v ní má nejsložitější zastoupení, probereme postupně její možné hodnoty.

Předně si povšimneme, že nemůže být $b \in \{0, 1\}$ (pro takové číslice by pravá strana (1) nebyla trojmístným číslem). Protože $a \geqq 1$, nemůže být ani $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ — pro takové číslice by pravá strana byla alespoň $250a$, zatímco levá strana (1) je vždy menší než $100a + 100 \leqq 200a$. Zbývá nám proto probrat hodnoty $b \in \{2, 3, 4\}$.

Pro $b = 2$ přejde (1) v rovnici $100a + 20 + c = 40a + 4c$ neboli $20 = 3(c - 20a)$, což je vyloučeno, neboť 20 není násobkem tří (navíc $c - 20a < 0$ díky tomu, že $a \geqq 1$ a $c \leqq 9$).

Pro $b = 3$ přejde (1) v rovnici $100a + 30 + c = 90a + 9c$ neboli $5(a + 3) = 4c$, což znamená, že c je nenulová číslice dělitelná pěti, tedy $c = 5$, a tak $a = 1$. Našli jsme řešení $n = 135$ (zkouška není nutná).

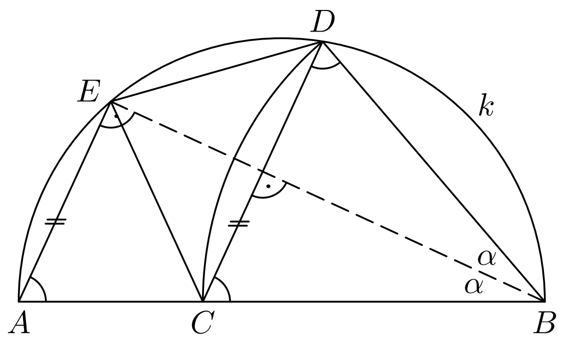
Pro $b = 4$ přejde (1) v rovnici $100a + 40 + c = 160a + 16c$ neboli $40 = 3(20a + 5c)$, což je vyloučeno, neboť 40 není násobkem tří (navíc je $3(20a + 5c) \geqq 60$).

Odpověď. Vyhovuje jediné číslo 135.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení rovnice, 1 bod za vyloučení $b \leqq 1$, 1 bod za vyloučení $b \geqq 5$, 1 bod za vyloučení $b = 2$, 1 bod za vyloučení $b = 4$, 1 bod za vyřešení $b = 3$ a nalezení čísla 135. V případě neúplného řešení udělte 1 bod za uhodnutí řešení.

3. Protože druhý z trojúhelníků AEC a CBD je podle zadání rovnoramenný s hlavním vrcholem B, ukážeme v první části řešení, že i první trojúhelník AEC je rovnoramenný s hlavním vrcholem E.

Protože bod E leží na ose úhlu ABD, mají jednak oba úhly ABE a DBE stejnou velikost, kterou označíme α (obr. 1), jednak platí $|EC| = |ED|$. Úsečka DE je však shodná i s úsečkou AE, neboť jim oběma jako tětivám kružnice k odpovídají shodné obvodové úhly α s vrcholem B.[1] Dohromady dostáváme, že i úsečky AE a CE jsou shodné. Tudíž AEC je skutečně rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem E.



Obr. 1

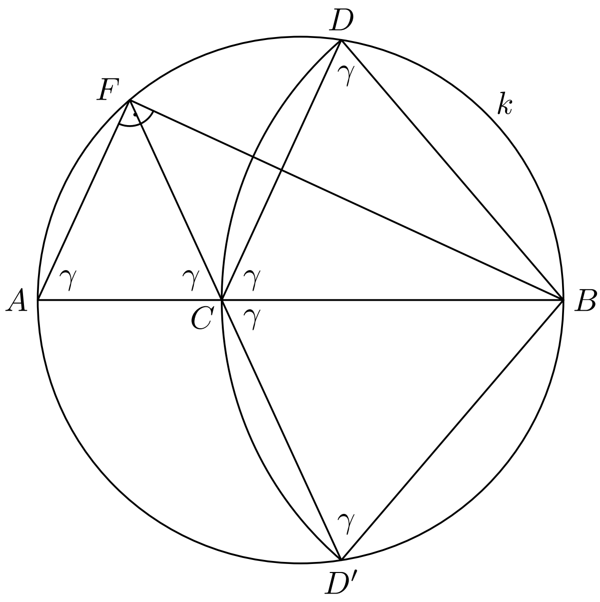
Rovnoramenné trojúhelníky AEC a CBD budou (jak máme dokázat) podobné, a to podle věty uu, když ukážeme, že mají shodné úhly EAC a BCD při svých základnách AC, resp. CD. To je však na obrázku již vyznačeno jako důsledek rovnoběžnosti úseček AE a CD, které jsou totiž obě kolmé na přímku BE (úhel AEB je pravý podle Thaletovy věty, kolmost $BE \perp CD$ plyne z osové souměrnosti trojúhelníku BCD).

Pokud si nepovšimneme rovnoběžnosti úseček CD a AE, lze z trojúhelníků BCD a ABE snadno vypočítat, že oba úhly BCD a BAE (a tedy i CAE) mají velikost $90° - \alpha$.

[1] Lze se též odvolat na známý výsledek, že bod E je středem oblouku AD kružnice opsané trojúhelníku ABD — ten se však dokazuje právě užitím poučky, že shodné obvodové úhly v téže kružnici přísluší pouze jejím shodným obloukům.

Poznámka. Rovnoramennost trojúhelníku AEC se dá zdůvodnit i tak, že $|\sphericalangle CAE| = 180^\circ - |\sphericalangle EDB|$ (kružnice) $= 180^\circ - |\sphericalangle ECB|$ (osová souměrnost) $= |\sphericalangle ACE|$ (vedlejší úhel).

Jiné řešení. Kružnice se středem B a poloměrem $|BC|$ protne kružnici k nejen v bodě D, ale rovněž v bodě D', který je s bodem D souměrně sdružený podle průměru AB kružnice k. Označme ještě F druhý průsečík přímky CD' s kružnicí k. Souměrně sdružené rovnoramenné trojúhelníky CBD a CBD' mají při svých základnách CD a CD' čtyři shodné vnitřní úhly, které jsou na obr. 2 označeny písmeny γ stejně jako pátý úhel ACF (vrcholový k úhlu BCD') a šestý úhel FAB (shodný s obvodovým úhlem $FD'B$). Podle věty *uu* jsou trojúhelníky AFC a CBD podobné, takže naše řešení bude hotovo, když ukážeme, že bod F leží na ose úhlu CBD (a tudíž platí $E = F$). To je však snadné: jednak díky shodným souhlasným úhlům BAF, BCD platí $AF \parallel CD$, jednak díky tomu, že úhel AFB je podle Thaletovy věty pravý, platí $BF \perp AF$; dohromady máme $BF \perp CD$, a tak je přímka BF skutečně osou souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku BCD s hlavním vrcholem B.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu z prvního řešení dejte celkem 4 body za důkaz, že AEC je rovnoramenný trojúhelník (z toho 1 bod za odvození rovnosti $|CE| = |DE|$, 2 body za zdůvodnění rovnosti $|AE| = |DE|$, další 1 bod za jejich důsledek $|AE| = |CE|$) a konečně 2 body za porovnání vnitřních úhlů obou rovnoramenných trojúhelníků. Za nezdůvodněné konstatování rovnosti $|AE| = |CE|$ žádný bod neudělujte, za případné pokračování v podobě ověřování shodnosti vnitřních úhlů obou dotyčných trojúhelníků pak udělte nejvýše 1 bod. Ten udělte i v případě, kdy jediným odvozeným poznatkem je fakt $AE \parallel CD$ a jeho důsledek v podobě shodnosti úhlů CAE a BCD.

Při druhém postupu udělte 2 body za konstrukci bodů D' a F, 2 body za důkaz podobnosti trojúhelníků AFC, BCD a 2 body za zdůvodnění rovnosti $E = F$.