68. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Jaký je největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, \dots, 2019\}$ tak, aby součin žádných tří z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti? Uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít větší počet prvků. (*Aleš Kobza*)

2. Pavel a Michal hrají následující hru: U vrcholů čtyřstěnu (trojbokého jehlanu) jsou zpočátku napsané nuly. Pavel nejprve vybere některý vrchol čtyřstěnu a zvětší číslo u něj napsané o 2. Poté Michal vybere některou hranu tohoto čtyřstěnu a zvětší čísla v obou jejích krajních bodech o 1. Jejich „tahy" se pravidelně střídají. Vyhrává ten, po jehož tahu budou ve všech vrcholech čtyřstěnu navzájem různá čísla. Který z hráčů si dokáže zajistit výhru? (*Tomáš Jurík*)

3. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF. (*Jaroslav Švrček*)

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 29. ledna 2019

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

68. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Mezi vybranými čísly nesmí být žádný násobek devíti a přitom mezi nimi může být nejvýše jedno číslo, které je dělitelné třemi, nikoli však devíti. Můžeme tedy vybrat všechna čísla, která nejsou dělitelná třemi, a přidat k nim jakékoli číslo, které je dělitelné třemi, nikoli však devíti.

Závěr. Největší možný počet čísel, která můžeme požadovaným způsobem vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, je tedy roven $\frac{2}{3} \cdot 2\,019 + 1 = 1\,347$.

Úloze vyhovuje např. množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 2015, 2017, 2018\}$, která má právě $1\,347$ prvků. Tato množina obsahuje číslo 3 jako jediné číslo dělitelné třemi, které však devíti dělitelné není.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za zdůvodnění, že tam nemůže být číslo dělitelné 9, 1 bod za zdůvodnění, že tam může být nejvýše jedno číslo dělitelné 3 (nedělitelné 9), 3 body za odhad maximálního počtu prvků na základě těchto pozorování, 1 bod za příklad vyhovující množiny.

2. Ukážeme, že vítěznou strategii má Pavel, který může vyhrát již svým druhým tahem.

Vrcholy uvažovaného čtyřstěnu označme písmeny A, B, C, D. V prvním tahu Pavel zvětší o 2 číslo u některého vrcholu čtyřstěnu $ABCD$, např. u A. Michal pak zvolí buď některou hranu vycházející z téhož vrcholu (např. AB), nebo vybere některou hranu, která z A nevychází, např. BC.

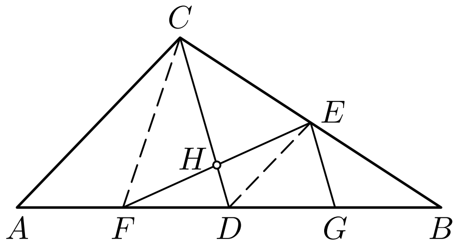
V prvním případě Pavel (ve svém druhém tahu) zvětší o 2 číslo napsané u jednoho z vrcholů C, D, např. u vrcholu C. U jednotlivých vrcholů A, B, C, D čtyřstěnu $ABCD$ pak budou *po řadě* napsána navzájem různá čísla $3, 1, 2, 0$. Ve druhém případě Pavel zvětší o 2 hodnotu u některého z vrcholů B nebo C, např. u B. U jednotlivých vrcholů A, B, C, D uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$ jsou pak i v tomto případě napsána *po řadě* navzájem různá čísla $2, 3, 1, 0$.

Tím je úloha vyřešena.

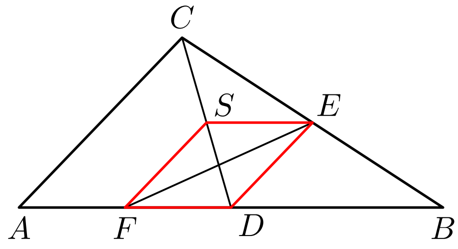
Poznámka. Úlohu lze řešit bez označení vrcholů jen úvahami o neuspořádaných čtveřicích k nim připsaných čísel, protože každé dva vrcholy čtyřstěnu jsou spojeny hranou. Se zápisy čtveřic čísel v pořadí od největšího po nejmenší pak celé řešení vypadá následovně: Po prvním Pavlově tahu vznikne čtveřice $2, 0, 0, 0$, kterou Michal může změnit buď na čtveřici $3, 1, 0, 0$, nebo na čtveřici $2, 1, 1, 0$. Každou z obou čtveřic zřejmě Pavel dokáže svým druhým tahem změnit na čtveřici $3, 2, 1, 0$, a to buď zvětšením jedné ze dvou nul na dvojku, anebo zvětšením jedné ze dvou jedniček na trojku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vysvětlení, že po dvou tazích jsou možnosti 3,1,0,0 resp. 2,1,1,0, 2 body za první případ, 2 body za druhý případ, 1 bod za závěr. Za pouhé konstatování (bez hlubšího zdůvodnění), že vítěznou strategii má Pavel, udělte 1 bod.

3. Nechť G značí střed úsečky BD, což znamená, že bod D je nejen středem strany AB, ale i středem úsečky FG (obr. 1). Úsečka EG je pak střední příčkou v trojúhelníku BCD, a je tudíž rovnoběžná s CD. Bod C tak leží na rovnoběžce se stranou EG trojúhelníku GEF jdoucí středem D jeho strany FG, a proto tato rovnoběžka CD nutně prochází i středem H třetí strany EF, jak jsme měli dokázat.



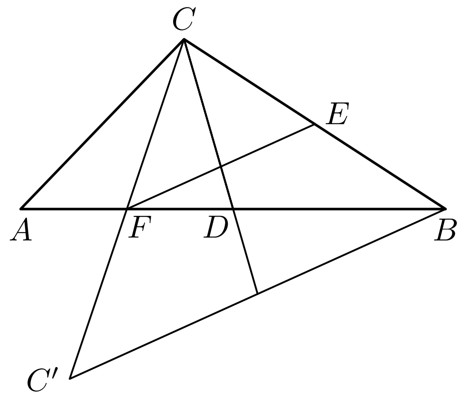
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Označme S střed těžnice CD trojúhelníku ABC (obr. 2). Úsečka DE je střední příčka v trojúhelníku ABC, takže $|DE| = \frac{1}{2}|AC|$, a úsečka FS je střední příčka v trojúhelníku ADC, takže $|FS| = \frac{1}{2}|AC|$. Úsečky DE a FS jsou tedy shodné a rovnoběžné (se stranou AC). Čtyřúhelník $DESF$ je proto rovnoběžník, a jak známo, jeho úhlopříčky se vzájemně půlí. Tím je důkaz ukončen.

Jiné řešení. Pro bod D platí $|FD| : |DB| = 1 : 2$. Sestrojíme-li bod C' jako obraz bodu C ve středové souměrnosti podle středu F (obr. 3), bude BF těžnice trojúhelníku BCC' a bod D jeho těžiště. Přímka CD tudíž obsahuje těžnici trojúhelníku BCC', a proto půlí jeho stranu BC' stejně jako jeho střední příčku EF s ní rovnoběžnou.



Obr. 3

Jiné řešení. Máme dokázat, že na přímce CD leží těžnice trojúhelníku CEF, což je ekvivalentní tomu, že obsahy trojúhelníků CDF a CED (obr. 1) jsou stejné.[1] Přitom zřejmě pro obsahy jednotlivých trojúhelníků platí

$$S(CDE) = \tfrac{1}{2}S(DBC) = \tfrac{1}{2}S(CAD) = S(DFC),$$

neboť E je střed BC, D je střed AB a F je střed AD.

Poznámka. Rovnost obsahů se dá dokázat i postupným výpočtem obsahů vzhledem k obsahu trojúhelníku ABC: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $S(ABC) = 1$. Jelikož $|FB| : |AB| = \frac{3}{4}$, je $S(BFC) = \frac{3}{4}$. Jelikož $|FD| : |DB| = \frac{1}{2}$, je $S(CDF) = \frac{1}{4}$. Dále $S(CDB) = \frac{1}{2}$, a protože E je střed CB, je $S(CED) = \frac{1}{2}S(CDB) = \frac{1}{4}$, takže opravdu $S(CDF) = S(CDB)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu udělte 3 body za zavedení bodu G, 1 bod za důkaz $EG \parallel CD$, 2 body za zdůvodnění, že střední příčka DH trojúhelníku GEF musí ležet na přímce CD.

Při druhém postupu dejte 3 body za zavedení bodu S, 1 bod za objev obou středních příček ED, FS, 1 bod za zdůvodnění, že jde o dvě rovnoběžné a shodné úsečky, a 1 bod za závěr, že $DESF$ je rovnběžník, a tudíž se jeho úhlopříčky půlí (místo toho lze uplatnit větu *usu* k důkazu shodnosti trojúhelníků DEH a SFH, kde H značí průsečík úhlopříček, z níž potřebná rovnost $|EH| = |FH|$ plyne).

Při třetím postupu dejte 3 body za zavedení bodu C', 1 bod za zdůvodnění, že D je těžiště trojúhelníku BCC' (a tudíž CD je přímka jeho těžnice), dále 1 bod za objev střední příčky EF a 1 bod za závěr, že těžnice půlí střední příčku.

Konečně za tvrzení, že stačí dokázat rovnost obsahů trojúhelníků CDF, CED (nebo ekvivalentně, že obsah čtyřúhelníku $CFDE$ je dvakrát větší než jeden z nich) dejte 3 body, za důkaz rovnosti zmíněných obsahů další 3 body. Za nedokončený výpočet však udělte nejvýše 1 bod.

---

[1] To plyne ze známého faktu, že pro libovolný bod X uvnitř úhlu QPR mají trojúhelníky PXQ, PXR stejný obsah, právě když bod X leží na přímce těžnice z vrcholu P trojúhelníku PQR.