**68. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie B

**1.** Pro nezáporná reálná čísla $a$, $b$ platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu
$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

**2.** Najděte všechna osmimístná čísla s touto vlastností: vyškrtneme-li v čísle jeho první dvě a jeho poslední dvě číslice, dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2 019krát menší než číslo původní.

**3.** Je dána kružnice $k$ se středem $S$ a tětivou $AB$, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce $BA$ je vybrán libovolný bod $K$ různý od $B$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku $AKS$ protne kružnici $k$ v takovém bodě $C$, který je souměrně sdružený s bodem $B$ podle přímky $SK$.

**4.** Řekneme, že množina kladných celých čísel je *čtvercová*, pokud je neprázdná, konečná a pokud součin všech jejích prvků je druhou mocninou celého čísla. Dokažte, že množina $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ má právě $2^{12} - 1$ čtvercových podmnožin.

Krajské kolo kategorie B se koná

**v úterý 2. dubna 2019**

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

**1.** Pro nezáporná reálná čísla $a$, $b$ platí $a+b=2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

(*Patrik Bak*)

**Řešení.** Výraz $V$ upravme následujícím způsobem:

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab+1} = \frac{4-2ab}{ab+1} = 1+\frac{3(1-ab)}{ab+1}. \tag{1}$$

Díky tomu, že $ab \geqq 0$, z předposledního vyjádření výrazu $V$ plyne odhad

$$V \leqq \frac{4-0}{0+1} = 4,$$

přitom rovnost $V=4$ je dosažena, právě když $ab=0$, což splňují dvě přípustné dvojice $(a,b)=(2,0)$ a $(a,b)=(0,2)$.

Ze známé nerovnosti $\sqrt{ab} \leqq \frac{1}{2}(a+b)$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou nezáporných čísel $a$, $b$ a z podmínky $a+b=2$ vyplývá, že $\sqrt{ab} \leqq 1$, a tedy rovněž $ab \leqq 1$. Proto je zlomek v posledním vyjádření (1) nezáporný, a tudíž platí $V \geqq 1$. Rovnost $V=1$ přitom nastane, právě když platí $ab=1$, což je podle našeho odvození nerovnosti $ab \leqq 1$ splněno pro jedinou přípustnou dvojici $(a,b)=(1,1)$, neboť pouze v případě $a=b$ se oba využité průměry rovnají.

*Odpověď.* Za daných podmínek má výraz $V$ nejmenší hodnotu 1 a největší hodnotu 4.

**Jiné řešení.** Tentokrát před úpravou výrazu $V$ do něj dosadíme $b=2-a$:

$$V = \frac{a^2+(2-a)^2}{a(2-a)+1} = \frac{2a^2-4a+4}{-a^2+2a+1} = -2+\frac{6}{-a^2+2a+1} = -2+\frac{6}{2-(a-1)^2}. \tag{2}$$

Protože ze zadání plyne $0 \leqq a \leqq 2$ neboli $-1 \leqq a-1 \leqq 1$, platí $0 \leqq (a-1)^2 \leqq 1$. Odtud pro jmenovatel posledního zlomku ve (2) plynou odhady $1 \leqq 2-(a-1)^2 \leqq 2$, a tudíž jsou splněny nerovnosti

$$V \leqq -2+\frac{6}{1} = 4 \quad \text{a} \quad V \geqq -2+\frac{6}{2} = 1.$$

Podle našeho postupu přitom rovnost $V=4$, resp. $V=1$ nastane, právě když hodnota $(a-1)^2$ bude rovna jedné, resp. nule, což vede na stejné dvojice $(a,b)$ jako v prvním řešení.

**Jiné řešení.** Najdeme-li dosažitelné hodnoty $V=1$, $V=4$ a napadne nás, že to budou hledané extrémy výrazu $V$ za daných podmínek na čísla $a$ a $b$, můžeme potřebné nerovnosti $V \geqq 1$ a $V \leqq 4$ ověřit poměrně snadno jejich ekvivalentními úpravami, kupříkladu tak, že po odstranění zlomku v obou případech využijeme rovnost $4=(a+b)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{ab+1} &\geqq 1, \\ a^2+b^2 &\geqq ab+1, \\ 4a^2+4b^2 &\geqq 4ab+(a+b)^2, \\ 3(a-b)^2 &\geqq 0, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{ab+1} &\leqq 4, \\ a^2+b^2 &\leqq 4ab+4, \\ a^2+b^2 &\leqq 4ab+(a+b)^2, \\ 0 &\leqq 6ab. \end{aligned}$$

Protože obě konečné nerovnosti platí, je celé řešení hotovo. (Zároveň jsme zjistili, že rovnost $V = 1$, resp. $V = 4$ nastane právě v případě, kdy přípustná čísla $a$, $b$ splňují podmínku $a = b$, resp. $ab = 0$.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho po 2 bodech za důkazy nerovností $V \geqq 1$, $V \leqq 4$ a po 1 bodu za příklady dvojic $(a, b)$, pro něž v dokázaných nerovnostech nastanou rovnosti, přičemž nepožadujeme odvození příkladů dvojic uvedeným rozborem, stačí je uvést. Pokud však jsou obě správné hodnoty 1 a 4 jenom uhodnuty, udělte dohromady pouze 1 bod, a to jen za předpokladu, že obě hodnoty jsou doloženy příklady dvojic $(a, b)$.

**2.** Najděte všechna osmimístná čísla s touto vlastností: vyškrtneme-li v čísle jeho první dvě a jeho poslední dvě číslice, dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2 019krát menší než číslo původní. (*Pavel Calábek*)

**Řešení.** V libovolném vyhovujícím osmimístném čísle $N$ označme $A$ jeho první dvojčíslí, $B$ následující čtyřčíslí a $C$ poslední dvojčíslí. Budeme-li $A$, $B$, $C$ chápat jako čísla zapsaná v desítkové soustavě, platí $10 \leqq A \leqq 99$, $1\,000 \leqq B \leqq 9\,999$ (podle zadání je číslo $B$ čtyřmístné, takže jeho zápis nezačíná nulou), $0 \leqq C \leqq 99$. Původní číslo $N$ pak má vyjádření $N = 10^6 A + 10^2 B + C$, jež má podle zadání splňovat rovnici

$$10^6 A + 10^2 B + C = 2\,019B \quad \text{neboli} \quad 10^6 A + C = 1\,919B.$$

Zapišme ji s ohledem na rozklad $1\,919 = 19 \cdot 101$ jako rovnici

$$(101 - 1)^3 A + C = 19 \cdot 101 \cdot B,$$

ze které plyne, že číslo 101 je dělitelem celého čísla $C - A$, neboť

$$(101 - 1)^3 A + C = \bigl(101^3 A - 3 \cdot 101^2 A + 3 \cdot 101 A - A\bigr) + C = 101k + (C - A),$$

kde $k$ je vhodné celé číslo. Protože však z uvedených odhadů pro čísla $A$ a $C$ plynou nerovnosti $-99 \leqq C - A \leqq 89$ a v intervalu $\langle -99, 89\rangle$ leží jediný násobek čísla 101, totiž číslo 0, musí platit $C - A = 0$. Po dosazení $C = A$ dostaneme zjednodušenou rovnici

$$\bigl(10^6 + 1\bigr)A = 19 \cdot 101 \cdot B,$$

jejíž obě strany už můžeme vydělit číslem 101, neboť $10^6 + 1 = 101 \cdot 9\,901$, a dospět tak ke konečné rovnici

$$9\,901A = 19B.$$

Odtud díky nesoudělnosti čísel 9 901 a 19 (platí totiž $9\,901 = 521 \cdot 19 + 2$) plyne, že čtyřmístné číslo $B$ je násobkem čísla 9 901, a proto poslední rovnice je v naší situaci splněna jedině tak, že je $B = 9\,901$ a $A = 19$ (a tedy rovněž $C = 19$).

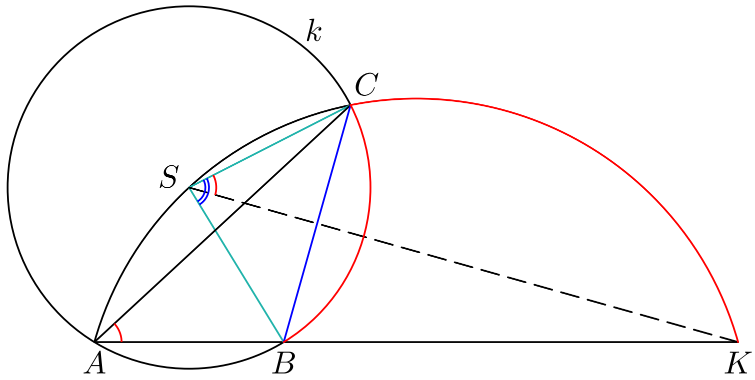
*Odpověď.* Úloze vyhovuje jediné osmimístné číslo 19 990 119.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vhodná označení čísel $A$, $B$, $C$ a sestavení rovnice udělte 1 bod, 2 body za pozorování, že 101 musí dělit $A \cdot 10^6 + 1$, 1 bod za odvození $101 \mid C - A$, 1 bod za odvození rovnosti $C = A$ a 1 bod za dořešení rovnice $9\,901 = 19B$ (nesoudělnost čísel 9 901 a 19 je nutno alespoň zmínit, její důkaz však nevyžadujeme).

Pokud řešitel dělitelnost číslem 101 neuplatní a dospěje pouze k závěru $1\,919 \mid A \cdot 10^6 + 1$, udělte 1 bod.

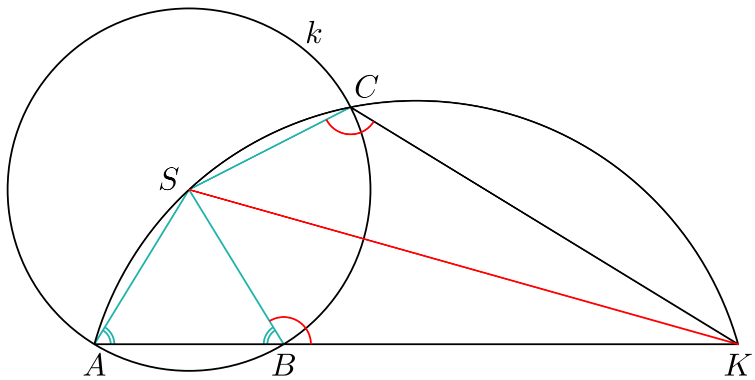
**3.** Je dána kružnice $k$ se středem $S$ a tětivou $AB$, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce $BA$ je vybrán libovolný bod $K$ různý od $B$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku $AKS$ protne kružnici $k$ v takovém bodě $C$, který je souměrně sdružený s bodem $B$ podle přímky $SK$. (*Šárka Gergelitsová*)

**Řešení.** Bod $C$ musí ležet na kružnicovém oblouku $ASK$ mezi body $S$ a $K$ (obr. 1). Oblouku $CK$ tak přísluší shodné obvodové úhly $CSK$ a $CAK$. Druhý z nich je přitom ostrým obvodovým úhlem nad obloukem $BC$ původní kružnice $k$ (neboť ostrý je i větší úhel $SAB$ při základně $AB$ rovnoramenného trojúhelníku $SAB$), takže se rovná polovině konvexního středového úhlu $BSC$. Té se tedy rovná i úhel $CSK$, tudíž přímka $KS$ půlí úhel $BSC$. Proto je i osou základny $BC$ rovnoramenného trojúhelníku $SBC$ a důkaz tvrzení je hotov.



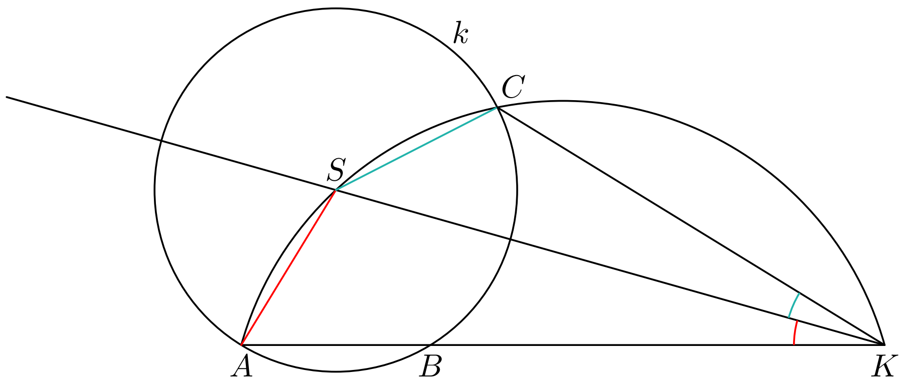
Obr. 1

**Jiné řešení.** Díky poloze bodu $C$ na kružnicovém oblouku $ASK$ (obr. 2) je čtyřúhelník $AKCS$ tětivový, a tak se jeho vnitřní úhly $KCS$ a $KAS$ doplňují do $180°$. Avšak druhý z těchto úhlů, totožný s úhlem $BAS$, je díky rovnosti $|AS| = |BS|$ shodný s úhlem $ABS$, který se zase doplňuje do $180°$ s vedlejším úhlem $KBS$. Dohromady dostáváme shodnost úhlů $KBS$ a $KCS$. Jsou to vnitřní úhly trojúhelníků $BKS$ a $CKS$, oba protilehlé k jejich společné straně $KS$. Protože díky zadání úlohy navíc platí $|BS| = |CS| < |KS|$, jsou trojúhelníky $BKS$ a $CKS$ shodné podle věty $Ssu$, a tudíž jejich vrcholy $B$ a $C$ jsou skutečně souměrně sdružené podle přímky $KS$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 2

**Jiné řešení.** Přímka $SK$ je zřejmě osou kružnice $k$, a protože bod $S$ je středem oblouku $CSA$ druhé kružnice, je zároveň i osou úhlu $AKC$ (obr. 3). V osové souměrnosti dle osy $SK$ tak bodu $B$ polopřímky $KA$ nutně odpovídá bod $C$, který je zřejmě prvním průsečíkem polopřímky $KC$ s kružnicí $k$.




Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, absenci zmínky o poloze bodu $C$ na oblouku $ASK$ přitom nepenalizujte.

U prvního postupu udělte 2 body za rovnost úhlů $CSK$ a $CAK$, 2 body za vztah mezi úhly $BAC$ a $BSC$, zbylé 2 body za závěrečnou úvahu o rovnoramenném trojúhelníku $SBC$.

U druhého postupu udělte 4 body za důkaz shodnosti úhlů $KBS$ a $KCS$ (z toho 2 body za vztah mezi úhly $KCS$ a $KAS$ — za pouhou zmínku o tětivovém čtyřúhelníku $AKCS$ žádný bod neudělujte) a 2 body za uplatnění věty $Ssu$ (chybí-li přitom porovnání délek $Ss$, strhněte 1 bod).

**4.** Řekneme, že množina kladných celých čísel je *čtvercová*, pokud je neprázdná, konečná a pokud součin všech jejích prvků je druhou mocninou celého čísla. Dokažte, že množina $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ má právě $2^{12} - 1$ čtvercových podmnožin.

(*Josef Tkadlec*)

**Řešení.** Víme, že přirozené číslo je druhou mocninou právě tehdy, když v jeho prvočíselném rozkladu má každé prvočíslo sudý počet výskytů. Prvočísla ze zadané množiny $\mathsf{Z} = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ tvoří množinu $\mathsf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, zbylých 12 čísel (jednička a ta složená) pak množinu

$$\mathsf{Q} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}.$$

Protože žádná ze čtvercových podmnožin množiny $\mathsf{Z}$ zřejmě nemůže mít své prvky vesměs z $\mathsf{P}$, musí obsahovat aspoň jedno číslo z $\mathsf{Q}$.

Vysvětleme, proč naopak *každou* z $2^{12} - 1$ neprázdných podmnožin $\mathsf{X}$ množiny $\mathsf{Q}$ lze jediným způsobem doplnit prvočísly z $\mathsf{P}$ tak, aby tím vznikla čtvercová množina (případně není nutné ani možné doplnit žádné prvočíslo z $\mathsf{P}$, je-li už sama množina $\mathsf{X}$ čtvercová). Plyne to z toho, že pro danou neprázdnou množinu $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Q}$ doplňujícími prvočísly z $\mathsf{P}$ musí být právě ta, která se v prvočíselném rozkladu čísla rovného součinu prvků z $\mathsf{X}$ vyskytují v lichém počtu. Takto vytvořené čtvercové množiny v počtu $2^{12} - 1$ ($= 4\,095$) jsou zřejmě navzájem různé (neboť každá má s množinou $\mathsf{Q}$ jiný průnik), proto je počet všech čtvercových podmnožin množiny $\mathsf{Z}$ skutečně roven $2^{12} - 1$, jak jsme měli dokázat.

**Jiné řešení.** Ukažme, že stejnou myšlenku lze uplatnit i při konstrukci libovolné čtvercové množiny $\mathsf{X} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Budeme postupně rozhodovat, které z aktuálních čísel $20, 19, \dots, 1$ (řazených sestupně) do $\mathsf{X}$ zařadit a které ne, sledujíce přitom rozklad součinu všech dosud vybraných čísel na prvočinitele (tento [prázdný] součin považujeme za rovný 1, dokud nevybereme první číslo).

- ▷ Pokud je aktuální číslo $n$ složené nebo rovno jedné, můžeme se rozhodnout libovolně (vybrat je, či nevybrat), protože je-li $n > 1$, jsou všichni jeho prvočinitelé menší a budou aktuální později.
- ▷ Pokud je aktuální číslo $n$ rovno prvočíslu $p$, máme při rozhodování o jeho výběru poslední možnost, jak ovlivnit paritu počtu jeho výskytů v rozkladu aktuálního součinu dosud vybraných čísel. Potřebujeme, aby se tento počet buď změnil z lichého čísla na sudé — tehdy $p$ vybereme, nebo aby zůstal sudý — tehdy $p$ nevybereme (jak tomu bude vždy u aktuálních prvočísel 19, 17, 13 a 11).

Popsaná jednoznačná rozhodnutí o každém aktuálním prvočíslu nám zaručí, že množina $\mathsf{X}$ všech vybraných čísel po ukončení celé konstrukce bude čtvercová. Protože přitom dvě možnosti (vybrat, či nevybrat) budeme mít pro právě 12 aktuálních čísel, a to 20, 18, 16, 15, 14, 12, 10, 9, 8, 6, 4 a 1, bude celkový počet možných výběrů $2^{12}$, v jednom případě však dostaneme prázdnou množinu $\mathsf{X}$, která je zadáním úlohy vyloučena.

**Jiné řešení.** Ukažme, že úlohu lze (byť komplikovaněji) řešit jistým rozborem možností, při kterém budeme dbát na zastoupení jednotlivých prvočísel v součinu čísel, jež budeme do čtvercové množiny po etapách vybírat.

Prvočísla 11, 13, 17 a 19 se zřejmě v žádné z počítaných čtvercových množin nemohou vyskytovat. Čísla z množiny $\mathsf{C} = \{1, 4, 9, 16\}$ jsou sama druhými mocninami, proto jejich doplnění či naopak odstranění nemá na čtvercovost takto upravované množiny vliv (aby to bylo korektní vyjádření, považujme dočasně za čtvercovou i *prázdnou* množinu). Odhlédněme tedy od dosud zmíněných čísel a určeme nejprve, kolik čtvercových podmnožin má množina zbylých čísel

$$\mathsf{M} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}.$$

V rozkladu každého čísla z $\mathsf{M}$ má některé z prvočísel $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ *lichý* počet výskytů, přitom do čtvercové podmnožiny musíme vybrat čísla z $\mathsf{M}$ právě tak, aby pro každé prvočíslo $p$ byl vybrán *sudý* počet čísel, která mají ve svém rozkladu *lichý* počet výskytů $p$. Máme tedy vybrat sudý počet čísel z každé ze skupin

$$\{7, 14\},\ \{5, 10, 15, 20\},\ \{3, 6, 12, 15\},\ \{2, 6, 8, 10, 14, 18\}. \tag{S}$$

Tyto skupiny však nejsou po dvou disjunktní, což komplikuje postup výběrů čísel z těchto skupin pro libovolnou čtvercovou podmnožinu $\mathsf{M}$, ke kterému bychom chtěli uplatnit kombinatorické pravidlo součinu. Rozdělme proto množinu $\mathsf{M}$ na (disjunktní) skupin násobků jednotlivých prvočísel podle *největšího* z prvočísel, která mají v rozkladu daného čísla *lichý* počet výskytů:

$$\mathsf{N}_7 = \{7, 14\},\ \mathsf{N}_5 = \{5, 10, 15, 20\},\ \mathsf{N}_3 = \{3, 6, 12\},\ \mathsf{N}_2 = \{2, 8, 18\}.$$

Z těchto užších skupin (v uvedeném pořadí) budeme vybírat čísla do libovolné čtvercové podmnožiny $\mathsf{M}$, a to tak, abychom dodrželi podmínku na zastoupení čísel z původních skupin uvedených v (S). V prvních dvou krocích musíme vybrat sudý počet (0 nebo 2) čísel z $\mathsf{N}_7$ i sudý počet (0, 2 nebo 4) čísel z $\mathsf{N}_5$. Na tyto dva výběry tak máme $2 \times 8 = 2^4$ možností. Poté s ohledem na to, zda bylo, resp. nebylo vybráno číslo $15 \in \mathsf{N}_5$, musíme z $\mathsf{N}_3$ vybrat lichý (1 nebo 3), resp. sudý (0 nebo 2) počet čísel. V obou případech tak budeme mít na výběr stejně $4 = 2^2$ možností, první tři výběry tak lze provést $2^4 \times 2^2 = 2^6$ způsoby. Poslední, čtvrtý výběr čísel z $\mathsf{N}_2$ bude záviset na tom, zda jsme z čísel $14 \in \mathsf{N}_7$, $10 \in \mathsf{N}_5$ a $6 \in \mathsf{N}_3$ vybrali lichý, resp. sudý počet — podle toho musíme z $\mathsf{N}_2$ vybrat stejně tak lichý (1 nebo 3), resp. sudý (0 nebo 2) počet čísel. I nyní máme v obou rozlišených případech pro výběr čísel z $\mathsf{N}_2$ stejně $4 = 2^2$ možností. Lze tedy naposled uplatnit pravidlo součinu a dojít tak k závěru, že hledaný počet všech čtvercových podmnožin $\mathsf{M}$ je roven $2^6 \times 2^2 = 2^8$. Protože pro každou z nich máme $2^4$ možností pro doplnění o čísla z $\mathsf{C}$, je celkový počet čtvercových podmnožin původní zadané množiny roven $2^{8+4}$, tedy $2^{12}$ — včetně té prázdné, za niž je teď ještě třeba odečíst jedničku.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, za drobné formální chyby strhněte 1 bod.

U postupu z prvního řešení udělte 1 bod za rozdělení zadané množiny na množinu $\mathsf{P}$ zastoupených prvočísel (z ní je možné prvočísla 11, 13, 17 a 19 rovnou eliminovat) a na množinu zbylých čísel $\mathsf{Q}$, 4 body za vysvětlení, proč každou skupinu čísel z $\mathsf{Q}$ lze jediným způsobem doplnit některými prvočísly z $\mathsf{P}$ na čtvercovou množinu a 1 bod za dokončení důkazu.

U postupu z druhého řešení udělte 1 bod za rozhodnutí konstruovat čtvercovou množinu postupným rozhodováním o zastoupení čísel v klesajícím pořadí, tj. od čísla 20 k číslu 1, 2 body za rozhodnutí o všech aktuálních číslech složených a 3 body za rozhodnutí o všech aktuálních prvočíslech. Pokud je však správně rozhodnuto pouze o prvočíslech 11, 13, 17, 19 a čtvercových číslech 1, 4, 9 a 16, udělte za takový počáteční pokus o konstrukci pouze 1 bod.

U neúplného postupu z třetího řešení udělte nejvýše 3 body, z toho 1 bod za eliminaci prvočísel 11, 13, 17, 19 společně s konstatováním o indiferentnosti čísel 1, 4, 9 a 16. Druhý bod pak udělte při dalších drobných úvahách o zastoupení čísel z vhodně vybraných množin, jako jsou kupř. $\{7, 14\}$ nebo $\{5, 10, 15, 20\}$. Třetí bod je možné udělit jen při výraznějším pokroku, jakým je kupř. úvaha o tom, že čtvercové množiny jsou právě ty, které obsahují sudý počet čísel z každé ze čtyř skupin uvedených v (S).