68. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Každé pole tabulky 68×68 máme obarvit jednou ze tří barev (červená, modrá, bílá). Kolika způsoby to lze učinit tak, aby každá trojice sousedních polí v každém řádku a v každém sloupci obsahovala pole všech tří barev?

2. Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem.

3. Na straně AB rovnoběžníku $ABCD$, v němž $|AB| = 1$, jsou zvoleny body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{2}$, $|BL| = \frac{1}{3}$. Na straně CD jsou zvoleny body P a Q tak, že $|CP| = \frac{1}{2}$ a $|CQ| = \frac{1}{3}$. Průsečík přímek LD a KP označme X, průsečík přímek BD a LQ označme Y. Dokažte, že přímka XY půlí stranu BC.

4. Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 2. dubna 2019

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Každé pole tabulky 68×68 máme obarvit jednou ze tří barev (červená, modrá, bílá). Kolika způsoby to lze učinit tak, aby každá trojice sousedních polí v každém řádku a v každém sloupci obsahovala pole všech tří barev? (*Josef Tkadlec*)

Řešení. Jakmile určíme barvy některých dvou sousedních polí jednoho řádku či sloupce tabulky, obarvení všech jeho dalších polí je už požadavky úlohy určeno jednoznačně. Barvy v každém řádku i sloupci se tak pravidelně střídají s periodou 3.

Řekněme, že $abcabc\ldots$ je obarvení polí prvního řádku. Ze šesti možných obarvení polí libovolného řádku

$$abcabc\ldots,$$
$$bcabca\ldots,$$
$$cabcab\ldots,$$
$$acbacb\ldots,$$
$$bacbac\ldots,$$
$$cbacba\ldots$$

zřejmě pro druhý řádek připadají v úvahu jen druhé a třetí. Jakmile jedno z nich pro druhý řádek zvolíme, druhé z nich musí být obarvením polí třetího řádku. Čtvrtý řádek pak bude obarven stejně jako první, pátý jako druhý atd. s periodou 3.

Shrňme naše úvahy. Pro obarvení $abcabc\ldots$ prvního řádku máme $3 \cdot 2 = 6$ možností (3 pro volbu a, 2 pro volbu b). Pro obarvení druhého řádku, jak jsme zjistili, pak máme dvě možnosti. Obarvení dalších řádků je už určeno jednoznačně. Počet všech vyhovujících obarvení celé tabulky je tudíž roven $6 \cdot 2 = 12$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování, že se barvy v každém řádku pravidelně střídají s periodou 3 (i bez podrobnějšího vysvětlení), udělte 2 body a další bod za zdůvodnění, že počet možností obarvení jednoho řádku je tudíž roven 6. Další 2 body dejte za zdůvodnění, proč po obarvení jednoho řádku lze další řádek obarvit dvěma způsoby, a poslední bod za závěr, že počet obarvení je roven 12. Za pouhé uhodnutí správného výsledku dejte 1 bod. (Stejné úvahy samozřejmě platí i pro sloupce.)

2. Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem. (*Tomáš Jurík*)

Řešení. Dejme tomu, že máme čtyři čísla s požadovanými vlastnostmi. Protože právě tři dvojice mají sudého největšího společného dělitele, jsou právě tři z nich sudá a jedno liché (nemohou být všechna sudá a dvě sudá jsou na tři sudé společné dělitele málo). Označme tři sudá čísla a, b a c tak, že pro jejich největší společné dělitele s lichým číslem d platí $(d, a) = 3$, $(d, b) = 5$, $(d, c) = 9$. Odtud pak vychází, že sudá čísla a, b, c jsou postupně násobky čísel 6, 10, 18 a číslo d je nutně násobek 45.

Čísla a, c mají společného dělitele 6, takže nutně platí $(a, c) = 6$. Hodnoty (a, b) a (b, c) jsou proto v nějakém pořadí čísla 2 a 4. Máme tak dvě možnosti:

Čísla a, b jsou násobky 4. Potom čísla a, b, c, d jsou postupně násobky čísel 12, 20, 18, 45. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $12 + 20 + 18 + 45 = 95$.

Čísla b, c jsou násobky 4. Potom čísla a, b, c, d jsou postupně násobky čísel 6, 20, 36, 45. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $6 + 20 + 36 + 45 = 107$.

Nejmenší možný součet je tudíž 95, čemuž odpovídá čtveřice 12, 20, 18, 45.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 1 bod udělte za zmínění skutečnosti, že tři ze čtyř hledaných čísel jsou sudá a jedno je liché, a další bod za zjištění, že jednotlivá čísla jsou násobky 6, 10, 18 a 45. 2 body pak dejte za využití dělitelnosti čtyřmi a konečně 2 body za závěr a určení správné čtveřice. Za pouhé uhodnutí správné čtveřice dejte 2 body.

3. Na straně AB rovnoběžníku $ABCD$, v němž $|AB| = 1$, jsou zvoleny body K a L tak, že $|BK| = \frac{1}{2}$, $|BL| = \frac{1}{3}$. Na straně CD jsou zvoleny body P a Q tak, že $|CP| = \frac{1}{2}$ a $|CQ| = \frac{1}{3}$. Průsečík přímek LD a KP označme X, průsečík přímek BD a LQ označme Y. Dokažte, že přímka XY půlí stranu BC. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení. Trojúhelníky KLX a PDX jsou zřejmě podobné (podle věty *uu*). Jejich poměr podobnosti je roven $|KL| : |PD| = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$. Ve stejném poměru tedy bod X dělí úsečku KP, takže $|KX| = \frac{1}{4}b$, kde $b = |BC|$. Podle věty *uu* jsou podobné i trojúhelníky BLY a DQY, přičemž jejich poměr podobnosti je $|BL| : |DQ| = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$. Je tedy $|LY| = \frac{1}{3}b$.

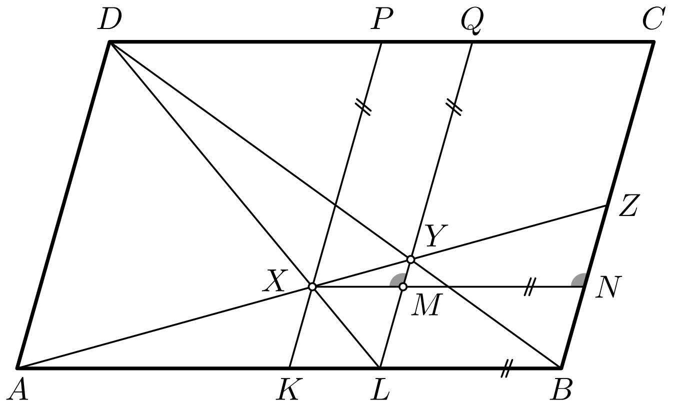
Označme Z střed strany BC uvažovaného rovnoběžníku $ABCD$ a veďme bodem X rovnoběžku se stranou AB (obr. 1). Její průsečíky s úsečkami LQ a BC označme postupně M a N, takže $|LM| = |BN| = |KX| = \frac{1}{4}b$, $|MY| = |LY| - |LM| = \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}b = \frac{1}{12}b$ a $|NZ| = |BZ| - |BN| = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b = \frac{1}{4}b$. Odtud plyne, že

$$\frac{|MY|}{|NZ|} = \frac{\frac{1}{12}b}{\frac{1}{4}b} = \frac{1}{3}$$

a zároveň

$$\frac{|XM|}{|XN|} = \frac{|KL|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

což spolu s rovností souhlasných úhlů XMY a XNZ znamená, že trojúhelníky XMY a XNZ jsou podobné (podle věty *sus*). Jejich vnitřní úhly při společném vrcholu X jsou tudíž shodné, a proto střed Z strany BC leží na přímce XY.



Obr. 1

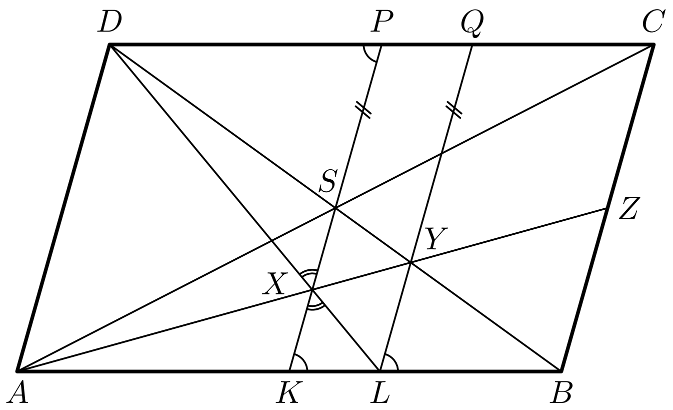
Poznámka. Úlohu lze řešit i využitím poznatku, že přímka XY prochází vrcholem A, což lze rovněž odvodit úvahami o podobných trojúhelnících. Z rovností $|AK| = \frac{1}{2}$, $|AL| = \frac{2}{3}$, $|KX| = \frac{1}{4}b$, $|LY| = \frac{1}{3}b$ totiž plyne

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{|KX|}{|LY|} = \frac{\frac{1}{4}b}{\frac{1}{3}b} = \frac{3}{4},$$

takže podobně jako ve vzorovém řešení dostáváme podobnost trojúhelníků AKX, ALY, z níž už plyne, že body A, X, Y leží v přímce. Analogicky dokážeme, že například i trojice bodů A, X, Z leží v přímce, neboť

$$\frac{|AK|}{|AB|}=\frac{\frac12}{1}=\frac12,\qquad \frac{|KX|}{|BZ|}=\frac{\frac14 b}{\frac12 b}=\frac12.$$

Jiné řešení. Označme Z střed strany BC, S průsečík přímek BD a KP. Bod S je zřejmě středem rovnoběžníku $ABCD$, takže je středem i jeho úhlopříčky AC (obr. 2).



Obr. 2

Trojúhelníky BKS a BLY jsou podobné, takže platí

$$\frac{|BY|}{|BS|}=\frac{|BL|}{|BK|}=\frac{\frac13}{\frac12}=\frac23\quad\text{neboli}\quad |BY|=\frac23|BS|.$$

Jelikož BS je těžnicí trojúhelníku ABC (S je střed strany AC), je bod Y jeho těžištěm. Bodem Y tak prochází i další těžnice AZ trojúhelníku ABC. Dokážeme, že také bod X leží na přímce AZ.

Z podobnosti trojúhelníků KLX a PDX plyne

$$\frac{|KX|}{|PX|}=\frac{|KL|}{|PD|}=\frac{\frac12-\frac13}{\frac12}=\frac{\frac16}{\frac12}=\frac13\quad\text{neboli}\quad |KX|=\frac13|PX|,$$

tudíž $|KX|=\frac13(|KP|-|KX|)$ a odtud $|KX|=\frac14|KP|=\frac14|BC|=\frac12|KS|=|SX|$. Bod X je tak středem úsečky KS.

Protože těžnice AZ trojúhelníku ABC protíná příčky trojúhelníku, které jsou rovnoběžné se stranou BC, v jejich středech, leží i střed X příčky KS na těžnici AZ. Přímka XY protíná tedy stranu BC v bodě Z.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyjádření délek KX a LY pomocí délky strany BC, 2 body za uvažování rovnoběžky bodem X a 2 body za důkaz kolinearity pomocí podobnosti.

Při postupu naznačeném v poznámce dejte 2 body za vyjádření délek KX a LY, další 2 body za důkaz kolinearity bodů A, X, Y a 2 body za důkaz kolinearity bodů A, X, Z (případně A, Y, Z). Za pouhé uhodnutí, že přímka XY prochází vrcholem A, udělte 1 bod a závěry z toho plynoucí už nehodnoťte.

4. Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažte, že platí
$$a+b+c>a^2+b^2+c^2. \qquad (\textit{Patrik Bak})$$

Řešení. Z předpokládané rovnosti $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$ a dále z podmínek $b>\frac{1}{2}$, $c>\frac{1}{2}$ plyne $\frac{5}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$, tj. $1>a$, a tudíž $a>a^2$, neboť číslo a je dle předpokladu kladné. Analogicky dostaneme také $b>b^2$ a $c>c^2$. Sečtením posledních tří nerovností již dostáváme kýženou nerovnost

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2.$$

Jiné řešení. Dokážeme silnější nerovnost, a sice

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

Jelikož a, b, c jsou kladná čísla větší než $\frac{1}{2}$, budou při substituci $a=x+\frac{1}{2}$, $b=y+\frac{1}{2}$, $c=z+\frac{1}{2}$ čísla x, y, z kladná. Snadno se přesvědčíme, že podmínka $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$ je pak ekvivalentní rovnosti

$$xy+yz+zx+x+y+z=\frac{1}{2}, \tag{1}$$

zatímco zesílená nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x^2+y^2+z^2<\frac{1}{4}. \tag{2}$$

Z podmínky (1) a kladnosti x, y, z však vyplývá $x<\frac{1}{2}$, takže $x^2<\frac{1}{2}x$. Analogicky $y^2<\frac{1}{2}y$, $z^2<\frac{1}{2}z$. Sečtením těchto tří nerovností dostáváme

$$x^2+y^2+z^2<\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Z podmínky (1) rovněž vyplývá $x+y+z<\frac{1}{2}$ neboli $\frac{1}{2}(x+y+z)<\frac{1}{4}$, což spolu s předchozím odhadem dává dokazovanou nerovnost (2).

Poznámka. Pokud $a\approx 1$, $b\approx\frac{1}{2}$, $c\approx\frac{1}{2}$, je $ab+bc+ca\approx\frac{5}{4}$, přičemž $a+b+c\approx$ $\approx a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}$. Zpřesněním tohoto pozorování se dá dokázat, že vylepšený odhad už nelze dále zlepšit: nerovnost $a+b+c>a^2+b^2+c^2+k$ neplatí obecně s žádnou konstantou $k>\frac{1}{2}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 3 body udělte za důkaz, že uvažovaná reálná čísla a, b, c jsou menší než jedna, a další 1 bod pak udělte za uvedení odtud plynoucích nerovností $a<a^2$, $b<b^2$, $c<c^2$. Za dokončení důkazu pak uveďte poslední 2 body. Za pouhé uvedení skutečnosti, že všechna tři čísla a, b, c jsou menší než jedna (bez důkazu), neudělujte žádný bod.