60. mezinárodní matematická olympiáda

IMO 2019
60TH INTERNATIONAL
MATHEMATICAL OLYMPIAD

Mezinárodní matematická olympiáda se uskutečnila letos v červenci ve Velké Británii, a to již potřetí ve své historii. Soutěž hostilo studentské město Bath na jihozápadě Anglie a zúčastnilo se jí 621 soutěžících ze 112 zemí. Naši studenti dovezli čtyři bronzové medaile.

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo z 32 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadání vybraných úloh naleznete na konci této zprávy.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Británie o tři dny později. Ubytováni byli na kolejích místní univerzity, kde také 16. a 17. července proběhla samotná soutěž. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh. Za každou úlohu mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády doveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentovali *Matěj Doležálek* z Gymnázia Dr. A. Hrdličky v Humpolci, *Karel Chwistek* z Mendelova Gymnázia v Opavě, *Václav Janáček* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Lenka Kopfová* z Mendelova Gymnázia v Opavě, *Josef Minařík* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Dominik Stejskal* z gymnázia v Krnově. Vedoucím týmu byl *Michal Rolínek*, Ph.D., z Institutu Maxe Plancka v Tübingenu a pedagogickým vedoucím *Josef Tkadlec* z IST Austria.

Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
168.–213.	Matěj Doležálek	7	1	0	7	7	0	22	B
168.–213.	Lenka Kopfová	7	1	0	7	7	0	22	B
214.–244.	Josef Minařík	7	0	0	7	7	0	21	B
245.–255.	Václav Janáček	7	0	1	5	7	0	20	B
386.–401.	Karel Chwistek	4	0	0	0	7	0	11	HM
402.–416.	Dominik Stejskal	3	0	0	0	7	0	10	HM
	Celkem	35	2	1	26	42	0	106	

Český tým získal čtyři bronzové medaile (Matěj, Vašek, Lenka a Pepa) a dvě čestná uznání (Karel a Dominik), která se udělují za úplné vyřešení alespoň jedné úlohy. V neoficiálním pořadí států obsadila ČR 46. místo. Tento výsledek sice není oslnivý, je ale třeba dodat, že český tým zazářil při řešení páté soutěžní úlohy, za niž získal maximální možný počet 42 bodů. To se mimo první patnáctku podařilo již jen Německu a Kanadě.

Pro zajímavost uvádíme i výsledky slovenských soutěžících v samostatné tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
55.–64.	Michal Staník	7	1	7	7	7	0	29	S
168.–213.	Martin Melicher	7	1	0	7	7	0	22	B
245.–255.	Matej Urban	7	0	0	6	7	0	20	B
256.–266.	Dávid Pásztor	7	2	0	5	5	0	19	B
345.–360.	Marián Poturnay	7	0	0	0	7	0	14	HM
402.–416.	Samuel Krajči	1	0	1	1	7	0	10	HM
	Celkem	36	4	8	26	40	0	114	

Co se týče ostatních států, o prvenství se podělili tradiční giganti USA a Čína s jednobodovým náskokem před Jižní Koreou. Olympiáda se vydařila polskému týmu, který nejenže skončil již druhý rok po sobě v první desítce, ale také dosáhl nebývalého úspěchu v individuální soutěži; Jan Fornal získal plný počet 42 bodů, a stal se tak (spolu s dalšími pěti soutěžícími) absolutním vítězem soutěže. Kompletní výsledky jsou dostupné na

`https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2019`.

Celkové pořadí států naleznete v následující tabulce:

	G	S	B	body		G	S	B	body
ČLR	6	0	0	227	Sýrie	0	1	1	92
USA	6	0	0	227	Nový Zéland	0	0	2	89
Jižní Korea	6	0	0	226	Švýcarsko	0	0	3	89
KLDR	3	3	0	187	Rakousko	0	0	4	84
Thajsko	3	3	0	185	Bosna a Hercegovina	0	0	0	84
Rusko	2	4	0	179	Tádžikistán	0	1	1	82
Vietnam	2	4	0	177	Uzbekistán	0	0	1	81
Singapur	2	4	0	174	Maroko	0	0	1	80
Srbsko	3	1	2	171	Finsko	0	1	1	78
Polsko	1	3	2	168	Kolumbie	0	0	2	77
Maďarsko	1	3	2	165	Bangladéš	0	0	1	76
Ukrajina	1	4	1	165	Belgie	0	1	1	75
Japonsko	2	2	2	162	Srí Lanka	0	0	1	73
Indonésie	1	4	1	160	Malajsie	0	0	2	71
Indie	1	4	0	156	Irsko	0	1	0	61
Izrael	1	3	2	156	Lotyšsko	0	0	0	56
Rumunsko	1	2	3	155	Turkmenistán	0	0	0	53
Austrálie	2	1	3	154	Tunisko	0	0	0	48
Bulharsko	0	5	1	152	Kypr	0	0	0	47
Velká Británie	1	2	3	149	Makedonie	0	0	0	47
Tchaj-wan	1	2	3	148	Alžírsko (5)	0	0	1	46
Kazachstán	0	2	4	146	Salvádor (4)	0	0	2	45
Írán	1	2	3	145	Kosovo	0	0	0	43
Kanada	1	1	4	144	Albánie	0	0	0	37
Francie	0	2	4	142	Island	0	0	0	37
Mongolsko	1	1	3	141	Panama (4)	0	0	1	37
Itálie	0	2	4	140	Kostarika	0	0	0	34
Peru	0	3	1	137	Pákistán (5)	0	0	1	34
Brazílie	0	2	4	135	Trinidad a Tobago	0	0	0	34
Turecko	1	1	3	135	Černá Hora (5)	0	0	0	33
Filipíny	0	1	5	129	Ekvádor (5)	0	0	0	32
Německo	1	0	3	126	Uruguay (5)	0	0	0	29
Saudská Arábie	0	1	4	124	Kuba (2)	0	0	0	23
Norsko	0	1	3	122	Chile (4)	0	0	0	20
Bělorusko	0	2	2	119	Kyrgyzstán	0	0	0	19
Estonsko	0	1	4	118	Paraguay	0	0	0	18
Hongkong	0	1	3	117	Irák	0	0	0	17
Nizozemsko	0	1	4	117	Nepál	0	0	0	17
Slovensko	0	1	3	114	Nikaragua (2)	0	0	0	17
Řecko	0	1	2	112	Egypt (4)	0	0	0	12
Mexiko	0	1	3	111	Ghana (4)	0	0	0	11
Chorvatsko	0	0	3	110	Myanmar	0	0	0	11
Španělsko	0	0	5	110	Kambodža	0	0	0	10
Slovinsko	0	2	1	109	Bolívie	0	0	0	9
Gruzie	0	1	4	108	Lucembursko	0	0	0	9
Česká republika	0	0	4	106	Dominikánská rep. (5)	0	0	0	5
JAR	0	0	4	106	Uganda	0	0	0	5
Dánsko	0	1	2	105	Guatemala (3)	0	0	0	4
Arménie	0	2	1	104	Honduras (3)	0	0	0	3
Moldavsko	0	1	1	100	Portoriko (1)	0	0	0	3
Ázerbájdžán	0	0	3	98	Tanzánie	0	0	0	3
Litva	0	0	3	96	Venezuela (2)	0	0	0	3
Argentina	0	0	3	95	Botswana (2)	0	0	0	2
Portugalsko	0	1	1	93	Angola (2)	0	0	0	0
Macao	0	0	3	92	Keňa (2)	0	0	0	0
Švédsko	1	0	1	92	Spojené arab. emiráty	0	0	0	0

Je potěšující, že česká stopa byla na soutěži viditelná nejen mezi soutěžícími. Průvodcem českého týmu byl *Pavel Turek* (zlatý medailista z Brazílie z roku 2017), jako koordinátor se do soutěže zapojil *Vojtěch Dvořák* (držitel čestného uznání z Thajska z roku 2015) a zlaté medaile, jakožto zástupce sponzora, předával *Tomáš Protivínský* (bronzový medailista z poslední MMO ve Velké Británii z roku 2002).

Příští, 61. ročník Mezinárodní matematické olympiády proběhne v ruském Petrohradu.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takové, že pro libovolná celá čísla a, b platí

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

(*Jihoafrická republika*)

2. Na stranách BC a AC trojúhelníka ABC leží po řadě body A_1 a B_1. Body P a Q jsou zvoleny postupně uvnitř úseček AA_1 a BB_1 tak, že přímka PQ je rovnoběžná se stranou AB. Dále P_1 je bod na přímce PB_1, pro nějž platí, že B_1 leží uvnitř úsečky PP_1 a zároveň $|\sphericalangle PP_1C| = |\sphericalangle BAC|$. Podobně bod Q_1 leží na přímce QA_1 tak, že A_1 leží uvnitř úsečky QQ_1 a zároveň platí $|\sphericalangle CQ_1Q| = |\sphericalangle CBA|$. (*Ukrajina*)

3. Na sociální síti s 2019 uživateli jsou některé dvojice uživatelů přátelé, přičemž přátelství jsou vždy vzájemná. Vztahy v této síti se mohou měnit opakovaným provedením následující operace:

> Tři uživatelé A, B, C splňující, že A se přátelí s B i C a zároveň že B a C nejsou přáteli, změní svá přátelství tak, že B se spřátelí s C a zároveň A ukončí svá přátelství s B i s C. Všechna ostatní přátelství zůstanou beze změny.

Na začátku je v síti 1010 uživatelů, z nichž každý má 1009 přátel, a 1009 uživatelů, z nichž každý má 1010 přátel. Ukažte, že existuje vhodná posloupnost uvedených operací, po jejímž provedení nemá žádný uživatel sítě více než jednoho přítele. (*Chorvatsko*)

4. Nalezněte všechny dvojice kladných celých čísel (k, n) splňujících

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\dots(2^n - 2^{n-1}).$$

(*Salvador*)

5. Banka města Bath vydává mince, na jejichž jedné straně je vyraženo písmeno H a na té druhé pak písmeno T. Pepa si n takových mincí postavil do řady zleva doprava a opakoval následující operaci: Ukazuje-li alespoň jedna mince H, pak Pepa obrátí k-tou minci zleva, kde k je počet mincí ukazujících H. Ukazují-li všechny mince písmeno T, posloupnost operací končí. Například pro $n = 3$ a počáteční konfiguraci THT by Pepa postupně získal $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a po těchto třech operacích by skončil.

(a) Ukažte, že pro libovolnou počáteční konfiguraci je Pepa nucen skončit po konečném počtu kroků.

(b) Pro každou počáteční konfiguraci C označíme $L(C)$ počet operací, které Pepa provede, než je nucen skončit. Například $L(THT) = 3$ a $L(TTT) = 0$. Pokud spočítáme hodnotu $L(C)$ pro každou z 2^n počátečních konfigurací, jaký bude aritmetický průměr všech spočítaných hodnot? (*USA*)

6. Nechť I je střed kružnice ω vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC, v němž $|AB| \neq |AC|$. Body dotyku kružnice ω se stranami BC, CA a AB označíme postupně jako D, E a F. Kolmice na přímku EF vedená bodem D protne kružnici ω podruhé v bodě R. Dále pak P je druhý průsečík AR s kružnicí ω. Konečně označme Q druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům PCE a PBF.

Dokažte, že průsečík přímek DI a PQ leží na kolmici vedené bodem A k přímce AI. (*Indie*)