8. Evropská dívčí MO (EGMO)

Od 7. do 13. dubna letošního roku se v ukrajinském hlavním městě Kyjevě konal již 8. ročník Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO). Patronát nad soutěží převzalo Ministerstvo školství a vědy Ukrajiny a Národní univerzita Tarase Ševčenka v Kyjevě. Ubytování všech účastníků, soutěž samotná, koordinace úloh i zasedání mezinárodní jury bylo zajištěno v nadstandardním prostředí hotelu Ramada-Encore v Kyjevě.

Osmého ročníku soutěže se zúčastnil rekordní počet soutěžících – celkově 196 ze 49 zemí všech kontinentů (z toho 35 evropských). Nechyběla mezi nimi silná družstva USA, Kanady, Japonska, Brazílie, Mexika a další.

České reprezentační družstvo středoškolaček se této soutěže zúčastnilo již počtvté, tentokrát jsme se však museli při nominaci obejít bez dívek, které v letošním školním roce maturují, neboť termín soutěže se překrýval s písemnou maturitní zkouškou. Podobně jako v předešlých třech ročnících bylo nutno (s ohledem na termín ústředního kola MO v kategorii A) vybrat dívky do reprezentačního týmu pro 8. EGMO již na základě jejich výsledků po centrální koordinaci úloh II. (krajského) kola v nejvyšší věkové kategorii, tedy ještě před ústředním kolem v kategorii A. Místa v reprezentaci si tak vybojovala následující čtveřice dívek: *Adéla Heroudková* (5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (6/8, G J. Keplera, Praha 6), *Michaela Svatošová* (7/8, G M. Koperníka, Bílovec) a *Adéla Karolína Žáčková* (6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucím české delegace a zástupcem v mezinárodní jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, pedagogickým vedoucím *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, oba z PřF UP v Olomouci.

Naše mladé družstvo si v silné mezinárodní konkurenci soutěži vedlo nad očekávání dobře. *Magdaléna Mišinová* získala v této prestižní mezinárodní soutěži pro Českou republiku historicky první zlatou medaili se ziskem 34 bodů (ze 42 možných), což představovalo v celkovém pořadí 8. místo (mezi Evropankami byla dokonce 7.). Absolutního skóre 42 bodů dosáhla a celkovou vítězkou 8. ročníku EGMO se stala *Jelena Ivančić* ze Srbska.

Zbylé tři naše reprezentantky si domů přivezly čestná uznání, která se udělují soutěžícím, které neziskaly medaili, avšak bezchybně vyřešily aspoň jednu úlohu. Nejblíže bronzové medaili byla nejmladší z nich – *Adéla Heroudková*, které za zisk 15 bodů unikla bronzová medaile o jediný bod. *Michaela Svatošová* získala 12 bodů a *Adéla Žáčková* 11 bodů. V oficiálním pořadí se pak naše družstvo umístilo v lepší polovině – na 22. místě (mezi Evropskými týmy pak na 16. místě), což představuje mírné zlepšení ve srovnání s výsledky našeho týmu v uplynulých dvou letech.

Kyjevští organizátoři zajistili pro účastníky soutěže pestrý doprovodný program. Pro soutěžící návštěvu centra města spojenou s prohlídkou některých historických budov a dále návštěvu nedalekého skanzenu ukrajinské kultury – Pyrohovo. Poslední den před večerním závěrečným ceremoniálem pak všichni účastníci absolvovali vyhlídkovou plavbu po Dněpru. Slavnostní vyhlášení výsledků a závěrečný ceremoniál 8. ročníku EGMO se uskutečnil v pátek 12. dubna navečer v centru metropole – v kyjevském Paláci kultury za přítomnosti ministryně školství a vědy Ukrajiny – *Lilie Hryněvičové* a dalších významných hostů.

Dále uvádíme texty všech soutěžních úloh zadaných na 8. EGMO.

1. soutěžní den (9. 4. 2019)

Úloha 1 Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, pro něž platí $ab+bc+ca = 1$ a současně

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

(*Nizozemsko*)

Úloha 2 Je dáno kladné celé číslo n. Na čtvercovou tabulku $2n\times 2n$ jsou umístěna domina tak, že každé pole této tabulky je sousední s právě jedním polem pokrytým dominem. Pro každé n určete největší počet domin, která takto můžeme umístit na tuto tabulku.

(*Dominem* rozumíme obdélník 2×1 nebo 1×2. Domina jsou umísťovaná na tabulku tak, že každé domino pokrývá právě dvě pole tabulky a jednotlivá domina se nepřekrývají. Dvě pole tabulky jsou *sousední*, právě když jsou různá a mají společnou stranu.)

(*Lucembursko*)

Úloha 3 Je dán trojúhelník ABC, v němž $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle ABC|$. Označme I střed kružnice jemu vepsané. Nechť D je bod úsečky BC, pro který platí $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ABC|$. Označme ω kružnici, která se dotýká přímky AC v bodě A a prochází bodem I. Nechť X $(X \neq A)$ je průsečík kružnice ω a kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že osy úhlů DAB a CXB se protínají na přímce BC.

(*Polsko*)

2. soutěžní den (10. 4. 2019)

Úloha 4 Nechť I je střed kružnice ω vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice procházející bodem B, která sa dotýká AI v bodě I, protíná stranu AB v bodě P $(P \neq B)$. Analogicky, kružnice procházející bodem C, která se dotýká AI v bodě I, protíná stranu AC v bodě Q $(Q \neq C)$. Dokažte, že přímka PQ je tečnou kružnice ω.

(*Polsko*)

Úloha 5 Nechť $n \geq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ splňující následující podmínky:

(A) $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) zbytky po dělení čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ číslem n jsou po dvou různé; a

(C) $b_1 + \ldots + b_n \le n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, což je největší celé číslo nepřevyšující x.)

(*Nizozemsko*)

Úloha 6 Alena nakreslila na kružnici 2019 tětiv s navzájem různými krajními body. Bod nazveme *označený*, právě když jde o

(i) jeden z 4038 krajních bodů těchto tětiv; nebo

(ii) průsečík aspoň dvou z těchto tětiv.

Alena potom každý z označených bodů číselně ohodnotila. Ze všech 4038 krajních bodů splňujících (i) ohodnotila některých 2019 bodů číslem 0 a zbývajících 2019 bodů číslem 1. Následně ohodnotila všechny body splňující (ii) libovolným celým číslem (ne nutně kladným).

Na každé tětivě uvažovala úsečky spojující po sobě jdoucí označené body. (Tětiva s k označenými body obsahuje $k-1$ takových úseček.) Dále ohodnotila každou takovou úsečku dvěma čísly, z nichž jedno je žluté a druhé je modré, přičemž žlutá čísla představují součet číslených ohodnocení koncových bodů na ohodnocované úsečce a modrá čísla absolutní hodnotu jejich rozdílu.

Následně Alena zjistila, že mezi všemi $N + 1$ žlutými čísly se každé z čísel $0, 1, \ldots, N$ vyskytuje právě jednou. Dokažte, že aspoň jedno modré číslo je násobkem 3.

(*Velká Británie*)

Podrobnější informace o letošním ročníku soutěže můžete najít na oficiálních stránkách EGMO (https://www.egmo.org).

Vedení českého týmu si touto cestou dovoluje poděkovat především pražské Nadaci RSJ Karla Janečka, která i v letošním roce poskytla finanční prostředky pro cestu českého týmu na 8. EGMO v rámci projektu JČMF, a dále brněnské firmě NEOGENIA s.r.o. za jejich účinnou sponzorskou pomoc spojenou se zajištěním jednotného reprezentačního oblečení pro celé české družstvo.

Příští – 9. ročník této soutěže se uskuteční ve druhé polovině dubna 2020 v nizozemském městě se symbolickým názvem *Egmond aan Zee*.

Jaroslav Švrček