Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpovědmi a nástiny řešení či odkazy na řešení v našem archivu) najdete ve druhé části textu.

1. *Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokažte, že pak nutně platí $a > c > d > b$. (Michal Rolínek)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet kladných čísel a, b je nejvýše 16. Jaká je největší možná hodnota jejich součinu?

N2. Součin kladných čísel a, b je alespoň 16. Jaká je nejmenší možná hodnota jejich součtu?

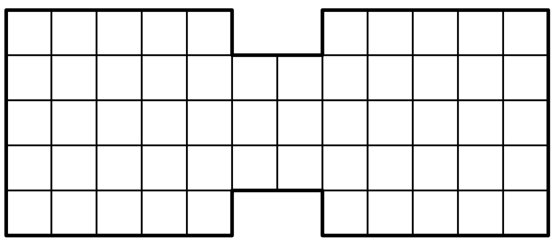
D1. Reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 splňují $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Ukažte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > > a_1b_2 + a_2b_1$.

D2. [Permutační nerovnost] Nechť $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ jsou reálná čísla a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je nějaké pořadí pevně daných navzájem různých reálných čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

maximální, právě když je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokažte.

2. *Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou.)* (Josef Tkadlec)



Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že počet způsobů, jak lze na šachovnici 8×8 umístit maximální počet střelců tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali, je druhá mocnina přirozeného čísla.

N2. Kolika způsoby lze vydláždit dominovými kostkami šachovnici 8×8, z níž jsou odříznuta dvě protější rohová pole?

D1. Kolika způsoby lze pokrýt dominovými kostkami obdélník 2×10?

D2. Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně“, která odděluje dvě její políčka, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníčky 2×1 tak, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel.

D3. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje útvar, který lze kostkami domina vydláždit přesně n způsoby.

3. *Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body P a Q. Označme R průsečík přímek BQ a CP a p, q, r postupně vzdálenosti bodů P, Q, R od přímky BC. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Ukažte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

N2. Ukažte, že v konfiguraci ze zadání úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$.

D1. Body P a Q leží ve stejné polorovině určené přímkou l. Jejich kolmé průměty na přímku l označme jako P' a Q' a průsečík přímek PQ' a $P'Q$ jako R. Ukažte, že pro vzdálenosti p, q, r bodů P, Q, R od přímky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

D2. Je dán bod X uvnitř trojúhelníka ABC. Ukažte, že označíme-li D průsečík přímek AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

D3. [Cevova věta (část)] Na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC jsou po řadě zvoleny body D, E a F tak, že se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Ukažte, že pak platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

4. *Řekneme, že podmnožina P množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ je* polovičatá, *pokud obsahuje 21 prvků a každé z 42 čísel v množinách P a $\mathsf{Q} = \{7x;\, x \in \mathsf{P}\}$ dává při dělení číslem 43 jiný zbytek. Určete počet polovičatých podmnožin množiny M.*

(Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že žádná dvě čísla z množiny $\mathsf{V} = \{0a, 1a, \dots, (p-1)a\}$ nedávají stejný zbytek při dělení prvočíslem p.

N2. [„Sedminásobek je jednoznačný“] Při značení z úlohy ukažte, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ existuje právě jedno $y \in \mathsf{M}$ takové, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čtěte jako „x dává stejný zbytek jako $7y$ při dělení 43“).

N3. Jaké zbytky dávají mocniny sedmi při dělení 43? Je-li $1 \in \mathsf{P}$, co lze říci o příslušnosti těchto zbytků do množin P a Q ze zadání úlohy?

D1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{1, \dots, p-1\}$ a její prvek a. Ukažte, že pak existuje právě jeden prvek $b \in \mathsf{U}$ takový, že ab dává zbytek 1 při dělení p.

D2. [Malá Fermatova věta] Je dáno prvočíslo p a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že pak $p \mid a^{p-1} - 1$.

D3. [Wilsonova věta]. Ukažte, že pro každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$.

5. *V rovině jsou dány dva různé body O a A. Určete množinu ortocenter všech trojúhelníků ABC, pro něž je bod O středem kružnice opsané.* (Pavel Šalom)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že $|\sphericalangle BVC| = 180° - |\sphericalangle BAC|$.

N2. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že obraz V' bodu V v souměrnosti podle přímky BC padne na kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Ukažte, že totéž platí i pro obraz V'' bodu V v souměrnosti podle středu úsečky BC.

N3. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Z úlohy N2 víme, že obraz V'' bodu V ve středové souměrnosti podle středu strany BC leží na kružnici opsané. Ukažte navíc, že AV'' je průměrem této kružnice.

N4. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem X.

N5. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu bodů, jež jsou středem nějaké její tětivy, která neobsahuje bod X.

D1. [Feuerbachova kružnice] Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V a středem O kružnice opsané. Ukažte, že středy jeho stran, středy spojnic vrcholů s jeho ortocentrem a paty jeho výšek leží na jedné kružnici, jejíž střed je navíc středem úsečky VO.

D2. V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O.

6. *Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin*

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)$$

je roven mocnině některého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro která je součin $(a+2b)(b+2a)$ mocninou některého prvočísla p.

N2. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je roven mocnině některého prvočísla.

D1. Pro navzájem různá přirozená čísla a, b, c platí, že

$$a + b + c \mid (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a).$$

Ukažte, že číslo $a + b + c$ je složené.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o odkazy na náš archiv.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A s řešeními

1. *Pro kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a > b$, $c > d$ platí*

$$a + b > c + d, \qquad ab < cd.$$

Dokažte, že pak nutně platí $a > c > d > b$. (Michal Rolínek)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Součet kladných čísel a, b je nejvýše 16. Jaká je největší možná hodnota jejich součinu? [64. Do součinu ab dosaďte vyjádření $a = p + \varepsilon$ a $b = p - \varepsilon$, kde $p \leqq 8$ je aritmetický průměr čísel a a b.]

N2. Součin kladných čísel a, b je alespoň 16. Jaká je nejmenší možná hodnota jejich součtu? [8. Použijte stejné vyjádření čísel a, b jako v N1 a ukažte, že z $ab \geqq 16$ plyne $p \geqq 4$.]

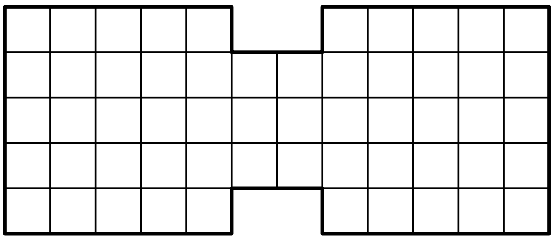
D1. Reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 splňují $a_1 > a_2$ a $b_1 > b_2$. Ukažte, že $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$. [Dokazovanou nerovnost ekvivalentně upravte na $(a_1 - a_2) \times (b_1 - b_2) > 0$.]

D2. [Permutační nerovnost] Nechť $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ jsou reálná čísla a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je nějaké pořadí pevně daných navzájem různých reálných čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom je výraz

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

maximální, právě když je $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Dokažte. [Stačí ukázat, že uspořádání, která nesplňují $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$, lze vylepšit „prohozením" jedné dvojice. To řeší úloha D1, která je vlastně úlohou D2 pro $n = 2$.]

2. *Dokažte, že počet možností, jak lze útvar na obrázku vydláždit dominovými kostkami, je druhou mocninou celého čísla. (Dominová kostka pokrývá vždy dvě políčka sousedící stranou.)* (Josef Tkadlec)



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

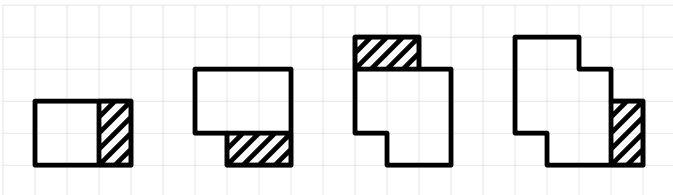
N1. Ukažte, že počet způsobů, jak lze na šachovnici 8×8 umístit maximální počet střelců tak, aby se žádní dva navzájem neohrožovali, je druhá mocnina přirozeného čísla. [Nepočítejte, pouze rozdělte na dvě podúlohy — rozmístění střelců na černá a na bílá políčka jsou navzájem nezávislá.]

N2. Kolika způsoby lze vydláždit dominovými kostkami šachovnici 8×8, z níž jsou odříznuta dvě protější rohová pole? [Nelze žádným způsobem: jsou-li odříznutá pole bílá, je třeba pokrýt 30 bílých a 32 černých polí, přitom libovolně umístěná kostka domina pokryje vždy 1 bílé a 1 černé pole.]

D1. Kolika způsoby lze pokrýt dominovými kostkami obdélník 2×10? [Postupujte indukcí pro obdélníky $2\times n$. Najdete tak souvislost s Fibonacciho čísly v podobě rovností $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, kde $p(n)$ značí počet možných vydláždění obdélníku $2 \times n$. Výsledek je 89.]

D2. Mějme šachovnici 8×8 a ke každé „hraně“, která odděluje dvě její políčka, napišme přirozené číslo, jež udává počet způsobů, kterak lze celou šachovnici rozřezat na obdélníčky 2×1 tak, aby dotyčná hrana byla součástí řezu. Určete poslední číslici součtu všech takto napsaných čísel. [63–A–III–3. Jaký je příspěvek jednoho vydláždění do celkového součtu?]

D3. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje útvar, který lze kostkami domina vydláždit přesně n způsoby. [Postupujte indukcí. Stačí vhodně „přilepovat“ stále stejný kus.]



3. *Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body P a Q. Označme R průsečík přímek BQ a CP a p, q, r postupně vzdálenosti bodů P, Q, R od přímky BC. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{r}.$$

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P. Ukažte, že platí

$$S_{APB} \cdot S_{CPD} = S_{BPC} \cdot S_{DPA}.$$

[Vyjádřete obsahy všech čtyř trojúhelníků pomocí takových základen, které leží na téže úhlopříčce čtyřúhelníku $ABCD$.]

N2. Ukažte, že v konfiguraci ze zadání úlohy platí $S_{BRC} > S_{PRQ}$. [Porovnejte obsahy trojúhelníků BCP a BQP.]

D1. Body P a Q leží ve stejné polorovině určené přímkou l. Jejich kolmé průměty na přímku l označme jako P' a Q' a průsečík přímek PQ' a $P'Q$ jako R. Ukažte, že pro vzdálenosti p, q, r bodů P, Q, R od přímky l platí

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

[Uvažujte vhodné dvojice podobných trojúhelníků, které jsou určeny zadanými body a jejich kolmými průměty na přímku l.]

D2. Je dán bod X uvnitř trojúhelníka ABC. Ukažte, že označíme-li D průsečík přímek AX a BC, platí

$$\frac{S_{AXB}}{S_{AXC}} = \frac{|BD|}{|DC|}.$$

[Nakreslete přímku AX vodorovně. Pak vynikne, že oba zlomky se rovnají podílu vzdáleností bodů B a C od přímky AX.]

D3. [Cevova věta (část)] Na stranách BC, CA a AB trojúhelníka ABC jsou po řadě zvoleny body D, E a F tak, že se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Ukažte, že pak platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

[Využijte třikrát výsledek úlohy D2.]

4. *Řekneme, že podmnožina* P *množiny* $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \dots, 42\}$ *je* polovičatá, *pokud obsahuje* 21 *prvků a každé z* 42 *čísel v množinách* P *a* $\mathsf{Q} = \{7x\,;\, x \in \mathsf{P}\}$ *dává při dělení číslem* 43 *jiný zbytek. Určete počet polovičatých podmnožin množiny* M.

(Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že žádná dvě čísla z množiny $\mathsf{V} = \{0a, 1a, \dots, (p-1)a\}$ nedávají stejný zbytek při dělení prvočíslem p. [Předpokládejte opak a ke sporu doveďte fakt, že p dělí rozdíl nějakých dvou čísel z množiny V.]

N2. [„Sedminásobek je jednoznačný“] Při značení z úlohy ukažte, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ existuje právě jedno $y \in \mathsf{M}$ takové, že $x \equiv 7y \pmod{43}$ (čtěte jako „x dává stejný zbytek jako $7y$ při dělení 43“). [Podle N1 pro $p = 43$ a $a = 7$ se mezi násobky 7 všech nenulových zbytků objeví každý nenulový zbytek právě jednou, tedy i předem zvolený zbytek x.]

N3. Jaké zbytky dávají mocniny sedmi při dělení 43? Je-li $1 \in \mathsf{P}$, co lze říci o příslušnosti těchto zbytků do množin P a Q ze zadání úlohy? [1, 7, 6, 42, 36, 37. Dále rozmyslete, proč v případě $1 \in \mathsf{P}$ je již příslušnost ostatních pěti určených zbytků do množin P a Q určena jednoznačně: $6, 36 \in \mathsf{P}$ a $7, 42, 37 \in \mathsf{Q}$.]

D1. Je dáno prvočíslo p, množina $\mathsf{U} = \{1, \dots, p-1\}$ a její prvek a. Ukažte, že pak existuje právě jeden prvek $b \in \mathsf{U}$ takový, že ab dává zbytek 1 při dělení p. [Podle N1 je mezi „násobky“ čísla a zastoupen každý možný zbytek při dělení p právě jednou. Tedy i zbytek 1.]

D2. [Malá Fermatova věta] Je dáno prvočíslo p a přirozené číslo a nesoudělné s p. Ukažte, že pak $p \mid a^{p-1} - 1$. [Podle N1 jsou množiny U a V (po redukci na zbytky při dělení p) shodné. Rovnat se tak musí i součiny jejich nenulových prvků. Co vyjde?]

D3. [Wilsonova věta]. Ukažte, že pro každé prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$. [Tvrzení je triviální pro $p \in \{2, 3\}$. V případě $p \geqq 5$ ze součinu vyškrtneme všechny dvojice činitelů, jejichž součin dává při dělení p zbytek 1. Která dvě čísla zbydou (neboť tvoří takovou dvojici sama se sebou)?]

5. *V rovině jsou dány dva různé body O a A. Určete množinu ortocenter všech trojúhelníků ABC, pro něž je bod O středem kružnice opsané.* (Pavel Šalom)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že $|\sphericalangle BVC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$. [Nezapomeňte na případ, kdy je trojúhelník ABC tupoúhlý.]

N2. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Ukažte, že obraz V' bodu V v souměrnosti podle přímky BC padne na kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Ukažte, že totéž platí i pro obraz V'' bodu V v souměrnosti podle středu úsečky BC. [V obou důkazech využijte výsledek úlohy N1.]

N3. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Z úlohy N2 víme, že obraz V'' bodu V ve středové souměrnosti podle středu strany BC leží na kružnici opsané. Ukažte navíc, že AV'' je průměrem této kružnice. [Díky středové souměrnosti platí $CV \parallel BV''$, a proto z $CV \perp AB$ plyne $BV'' \perp AB$.]

N4. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem X. [V případě $X = S$ jde o množinu $\{S\}$, v případě $X \neq S$ o Thaletovu kružnici nad průměrem XS.]

N5. Je dána kružnice k se středem S a uvnitř ní bod X. Určete množinu bodů, jež jsou středem nějaké její tětivy, která neobsahuje bod X. [Ke konstrukci tětivy s daným středem využijte faktu, že osa každé tětivy prochází středem kružnice. Kdy však tato konstrukce vede k tětivě, jež bodem X prochází? Hledanou množinou je vnitřek kružnice k, a to v případě $X = S$ s výjimkou jediného bodu S, v případě $X \neq S$ jsou vyloučeny všechny body Thaletovy kružnice nad průměrem XS kromě bodu S (který tentokrát do výsledné množiny naopak patří).]

D1. [Feuerbachova kružnice] Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V a středem O kružnice opsané. Ukažte, že středy jeho stran, středy spojnic vrcholů s jeho ortocentrem a paty jeho výšek leží na jedné kružnici, jejíž střed je navíc středem úsečky VO. [Využijte výsledku úlohy N2 a použijte stejnolehlost $\mathsf{H}(V, \frac{1}{2})$.]

D2. V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O. [58–A–III–6]

6. *Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin*

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$$

je roven mocnině některého prvočísla. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro která je součin $(a + 2b)(b + 2a)$ mocninou některého prvočísla p. [$a = b = 3^k$, kde $k \geqq 0$. Ze soustavy rovnic $a + 2b = p^u$ a $b + 2a = p^v$ vyjádřete neznámé a, b a ukažte, že jejich hodnoty jsou obě kladné, jen když se přirozená čísla u a v rovnají — pak ovšem také $a = b$.]

N2. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a + b)(b + c)(c + a)$ je roven mocnině některého prvočísla. [Ukažte, že alespoň jedna závorka je sudá, a proto $p = 2$. Při uspořádání $a \geqq b \geqq c$, které můžeme předpokládat, bude pro tři mocniny $a+b$, $a+c$, $b+c$ čísla 2 platit $a+b \geqq a+c \geqq b+c$. Kdyby $a+b$, $a+c$ byly různé mocniny čísla 2, byla by první alespoň dvojnásobkem druhé, tj. $a+b \geqq 2(a+c)$, odkud by plynulo $b \geqq a+2c > a$, a to je spor s $a \geqq b$. Proto musí platit $a+b = a+c$ neboli $b = c$. To už vede k závěru, že úloze kromě snadno uhodnutelných trojic $[2^k, 2^k, 2^k]$ vyhovují v libovolném pořadí také trojice čísel $[2^n - 2^k, 2^k, 2^k]$, kde $0 \leqq k < n-1$, a že žádná jiná řešení neexistují.]

D1. Pro navzájem různá přirozená čísla a, b, c platí, že

$$a+b+c \mid (a+2b)(b+2c)(c+2a).$$

Ukažte, že číslo $a+b+c$ je složené. [Pokud by $a+b+c$ bylo prvočíslem, dělilo by jednu ze závorek, řekněme $a+2b$, a tedy by dělilo i rozdíl $a+2b-(a+b+c) = b-c$, takže by platilo $a+b+c < |b-c|$, což je spor.]