Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či odkazy na řešení v našem archivu) najdete ve druhé části textu.

1. *Najděte všechna čtyřmístná čísla* $\overline{abcd}$ *s ciferným součtem* 12 *taková, že* $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$.

N2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$.

N3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 8 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$.

D1. Najděte největší a nejmenší čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$.

D2. Najděte všechna osmimístná čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným součtem 16 taková, že $\overline{efgh}-\overline{abcd}=1$.

2. *Je dán konvexní šestiúhelník* $ABCDEF$*, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod* P *je takový, že čtyřúhelník* $CDEP$ *je rovnoběžník. Dokažte, že bod* P *je středem kružnice opsané trojúhelníku* ACE *a současně i průsečíkem výšek trojúhelníku* BDF.

(Jakub Löwit)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a že se navzájem půlí.

N2. Ukažte, že pokud jsou dvě shodné úsečky neležící v jedné přímce rovnoběžné, tvoří jejich krajní body rovnoběžník.

D1. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Ukažte, že střed úsečky CF splývá s průsečíkem přímek AD a BE.

D2. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Označme X a Y průsečíky výšek trojúhelníků ACE a BDF. Ukažte, že v případě $X \neq Y$ střed úsečky XY půlí úsečku AD.

3. *Určete všechny dvojice přirozených čísel* a *a* b*, pro něž platí*

$$2[a,b]+3(a,b)=ab,$$

kde $[a,b]$ *značí nejmenší společný násobek a* (a,b) *největší společný dělitel přirozených čísel* a *a* b.

(Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro něž platí $a\cdot[a,b] = 4\cdot(a,b)$, přičemž symbol $[a,b]$ označuje nejmenší společný násobek a (a,b) největší společný dělitel celých kladných čísel a, b.

N2. Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost $a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq$ $\geqq 2ab$. Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost.

D1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí rovnost množin $\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\}$, přičemž (x, y) označuje největší společný dělitel a $[x, y]$ nejmenší společný násobek čísel x a y.

D2. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost $\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}$, kde (x, y) a $[x, y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y.

4. *Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L. Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obsahu.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Přesvědčte se, že střední příčky (tj. spojnice středů stran) dělí libovolný trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky.

N2. Uvědomte si, že dva trojúhelníky mají shodné obsahy, shodují-li se jak ve dvou stranách, tak i v k nim příslušných výškách. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč jedna těžnice libovolného trojúhelníku půlí jeho obsah, zatímco všechny tři těžnice dělí jeho obsah na šest stejně velkých dílů.

D1. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně, mají své obsahy v poměru příslušných výšek k této straně. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč tři úsečky, které spojují vrcholy trojúhelníku s jeho těžištěm, dělí jeho obsah na tři stejně velké díly, aniž přitom užijete výsledek úlohy N2.

D2. Nad přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC sestrojme čtverec $ABDE$. Zjistěte (v závislosti na délkách stran trojúhelníku), v jakém poměru rozděluje přímka výšky z vrcholu C na přeponu AB obsah čtverce $ABDE$.

D3. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné výšce, mají své obsahy v poměru délek stran, jimž tato výška přísluší. Užitím tohoto pravidla pak dokažte tvrzení: Libovolný konvexní čtyřúhelník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky o obsazích, které lze označit S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnost $S_2 = S_4$ nastane, právě když jsou rovnoběžné ty strany čtyřúhelníku, které náleží trojúhelníkům o obsazích S_1 a S_3.

5. *Tabulku 3×3 máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku bylo sudé číslo?

N2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $2, 3, \ldots, 10$ tak, aby v každém řádku bylo největší číslo součtem ostatních dvou?

N3. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $4, 5, \ldots, 12$ tak, aby v každém sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou?

D1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součin čísel v každém řádku byl druhou mocninou nějakého přirozeného čísla?

D2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku a v každém sloupci byl nějakým prvočíslem?

6. *Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Najděte největší možnou hodnotu součtu $a + b + c$.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro kladná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + ab \leqq 2$. Najděte největší možnou hodnotu součinu ab.

N2. Dokažte nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$ a zjistěte, kdy v ní nastává rovnost.

N3. Reálná čísla a, b, c mají součet 3. Dokažte, že $3 \geqq ab + bc + ca$. Kdy nastane rovnost?

D1. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9$.

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu $V = (a^4 + b^4 + ab + 1)/(a + b)$.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o odkazy na náš archiv.

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C s řešeními

1. *Najděte všechna čtyřmístná čísla* $\overline{abcd}$ *s ciferným součtem* 12 *taková, že* $\overline{ab}-\overline{cd}=1$. (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$. [Takové číslo $\overline{abab}$ neexistuje, neboť jeho ciferný součet je sudý.]

N2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$. [Takové číslo $\overline{ab(a-1)b}$ neexistuje, neboť jeho ciferný součet je lichý.]

N3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 8 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$. [1313, 2222, 3131, 4040]

D1. Najděte největší a nejmenší čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$. [7060, 1606 — pokud připustíme zápis $\overline{06}$, jinak 2515.]

D2. Najděte všechna osmimístná čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným součtem 16 taková, že $\overline{efgh}-\overline{abcd}=1$. [Vysvětlete nejdříve, proč při sčítání $\overline{abcd}+1$ musí nastat *právě jeden* přenos jedničky do vyššího řádu, takže každé hledané číslo je tvaru $\overline{abc9\,ab(c+1)0}$. Vyhovují čísla 1029 1030, 1119 1120, 1209 1210, **2019 2020**, 2109 2110, 3009 3010.]

2. *Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod P je takový, že čtyřúhelník $CDEP$ je rovnoběžník. Dokažte, že bod P je středem kružnice opsané trojúhelníku ACE a současně i průsečíkem výšek trojúhelníku BDF.* (Jakub Löwit)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a že se navzájem půlí. [Úhlopříčky jsou zároveň výškami rovnoramenných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech kosočtverce.]

N2. Ukažte, že pokud jsou dvě shodné úsečky neležící v jedné přímce rovnoběžné, tvoří jejich krajní body rovnoběžník. [Dokreslete další dvě úsečky, které s danými úsečkami vytvoří konvexní čtyřúhelník. Jeho úhlopříčka rozděluje čtyřúhelník na dva trojúhelníky, které jsou shodné podle věty *sus*.]

D1. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Ukažte, že střed úsečky CF splývá s průsečíkem přímek AD a BE. [$ACDF$ i $ABDE$ jsou rovnoběžníky.]

D2. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Označme X a Y průsečíky výšek trojúhelníků ACE a BDF. Ukažte, že v případě $X\neq Y$ střed úsečky XY půlí úsečku AD. [Z rovnoběžníků $ABDE$ a $ACDF$ vidíme, že úsečky AD, BE a CF procházejí jedním bodem. Ten určuje středovou souměrnost, v níž si odpovídají jak body A, D, tak body C, F i body E, B, a tedy i trojúhelníky ACE a DFB. Proto jsou podle středu úsečky AD souměrně sdružené nejen průsečíky výšek zmíněných trojúhelníků (jak jsme měli ukázat), ale i jejich těžiště, středy jim opsaných i středy jim vepsaných kružnic. Stejné závěry platí i pro tři další dvojice souměrně sdružených trojúhelníků (ABC, DEF), (ABF, DEC) a (AEF, DBC).]

3. *Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro něž platí*

$$2[a,b]+3(a,b)=ab,$$

kde $[a,b]$ značí nejmenší společný násobek a (a,b) největší společný dělitel přirozených čísel a a b. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro něž platí $a \cdot [a,b] = 4 \cdot (a,b)$, přičemž symbol $[a,b]$ označuje nejmenší společný násobek a (a,b) největší společný dělitel celých kladných čísel a, b. [62–C–S–2]

N2. Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a,b]$ a největší společný dělitel (a,b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost $a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b] \geqq 2ab$. Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. [60–C–I–5]

D1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí rovnost množin $\{a\cdot[a,b], b\cdot(a,b)\} = \{45, 180\}$, přičemž (x,y) označuje největší společný dělitel a $[x,y]$ nejmenší společný násobek čísel x a y. [61–C–S–1]

D2. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost $\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\}$, kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y. [61–C–I–3]

4. *Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L. Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obsahu.* (Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Přesvědčte se, že střední příčky (tj. spojnice středů stran) dělí libovolný trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. [Střední příčky jsou rovnoběžné s protilehlými stranami, a proto jsou všechny čtyři trojúhelníky podobné. Shodnost vyplývá z toho, že střední příčky půlí jednotlivé strany.]

N2. Uvědomte si, že dva trojúhelníky mají shodné obsahy, shodují-li se jak ve dvou stranách, tak i v k nim příslušných výškách. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč jedna těžnice libovolného trojúhelníku půlí jeho obsah, zatímco všechny tři těžnice dělí jeho obsah na šest stejně velkých dílů. [V trojúhelníku ABC s těžnicemi AA_1, BB_1, CC_1 a těžištěm T pro první tvrzení o těžnici AA_1 užijte pravidlo na dvojici trojúhelníků (ABA_1, ACA_1), pro druhé tvrzení o šesti dílech navíc i na dvojice (ATC_1, BTC_1), (BTA_1, CTA_1) a (CTB_1, ATB_1).]

D1. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně, mají své obsahy v poměru příslušných výšek k této straně. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč tři úsečky, které spojují vrcholy trojúhelníku s jeho těžištěm, dělí jeho obsah na tři stejně velké díly, aniž přitom užijete výsledek úlohy N2. [Těžiště má od každé strany trojúhelníku třikrát menší vzdálenost než protější vrchol.]

D2. Nad přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC sestrojme čtverec $ABDE$. Zjistěte (v závislosti na délkách stran trojúhelníku), v jakém poměru rozděluje přímka výšky z vrcholu C na přeponu AB obsah čtverce $ABDE$. [Podle Eukleidovy věty o odvěsně to je $a^2 : b^2$, protože přímka výšky z vrcholu C dělí čtverec na dva obdélníky se společnou stranou.]

D3. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné výšce, mají své obsahy v poměru délek stran, jimž tato výška přísluší. Užitím tohoto pravidla pak dokažte tvrzení: Libovolný konvexní čtyřúhelník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky o obsazích, které lze označit S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnost $S_2 = S_4$ nastane, právě když jsou rovnoběžné ty strany čtyřúhelníku, které náleží trojúhelníkům o obsazích S_1 a S_3. [Označíme-li dotyčné obsahy S_i čtyř trojúhelníků v kruhovém pořadí kolem jejich společného vrcholu, oba poměry $S_1 : S_2$ a $S_4 : S_3$ budou shodné s poměrem, v jakém jedna z úhlopříček čtyřúhelníku dělí jeho druhou úhlopříčku. Rovnost $S_2 = S_4$ je ekvivalentní s rovností $S_1 + S_2 = S_1 + S_4$, jež je rovností obsahů dvou trojúhelníků se společnou stranou.]

5. *Tabulku 3×3 máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky. (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku bylo sudé číslo? [Ne, protože pak by musel být i součet všech čísel sudý a $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.]

N2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $2, 3, \ldots, 10$ tak, aby v každém řádku bylo největší číslo součtem ostatních dvou? [Ano, vyhovuje například vyplnění řádků trojicemi čísel $(2, 6, 8)$, $(4, 5, 9)$ a $(3, 7, 10)$ v jakémkoli pořadí.]

N3. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $4, 5, \ldots, 12$ tak, aby v každém sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou? [Ne. Součet všech 9 čísel je 72, takže součet tří sloupcových maxim by musel být 36, což je více než $10 + 11 + 12$.]

D1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součin čísel v každém řádku byl druhou mocninou nějakého přirozeného čísla? [Ne, protože součin zadaných čísel není druhou mocninou.]

D2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku a v každém sloupci byl nějakým prvočíslem? [Ano, jedno z řešení je zleva doprava a shora dolů s čísly po řadě 1, 3, 7, 6, 9, 2, 4, 5, 8.]

6. *Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqq 1$. Najděte největší možnou hodnotu součtu $a + b + c$.* (Ján Mazák)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro kladná čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + ab \leqq 2$. Najděte největší možnou hodnotu součinu ab. [Využijte odhad $2ab \leqq a^2 + b^2$, největší hodnota $ab = 2/3$ se dosáhne pro $a = b = \sqrt{2/3}$.]

N2. Dokažte nerovnost $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ a zjistěte, kdy v ní nastává rovnost. [Pronásobíme dvěma a upravíme do tvaru $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$, rovnost nastane, právě když $a=b=c$.]

N3. Reálná čísla a, b, c mají součet 3. Dokažte, že $3 \geqq ab+bc+ca$. Kdy nastane rovnost? [Plyne z rovnosti $9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ a z předešlé úlohy. Rovnost nastane jedině v případě $a=b=c=1$.]

D1. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost $a^2+b^2+c^2+3abc<9$. [68–C–I–3]

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu $V=(a^4+b^4+ab+1)/(a+b)$. [68–B–I–4]