Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte všechna čtyřmístná čísla* $\overline{abcd}$ *s ciferným součtem* 12 *taková, že* $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.
(Patrik Bak)

Řešení. Podle zadání je číslo $\overline{ab}$ o jednotku větší než číslo $\overline{cd}$ neboli

$$\overline{ab}=\overline{cd}+1.$$

Podle hodnoty číslice d tak máme dvě možnosti.

Pokud $d<9$, přičtením jednotky „nepřejdeme přes desítku“, takže pro jednotlivé číslice platí $a=c$ a zároveň $b=d+1$. V tom případě je ciferný součet hledaného čísla roven

$$a+b+c+d=c+(d+1)+c+d=2(c+d)+1,$$

což je liché číslo, a tudíž se nemůže rovnat číslu 12.

Pro $d=9$ naopak přičtením jednotky „přejdeme přes desítku“, takže musí být $b=0$ a $a=c+1\leqq 9$. Pro ciferný součet hledaného čísla pak platí $a+b+c+d=$ $=(c+1)+0+c+9=2c+10$, což je rovno 12, právě když $c=1$. Dostáváme tak jediné řešení $c=1$, k němuž dopočítáme $a=c+1=2$.

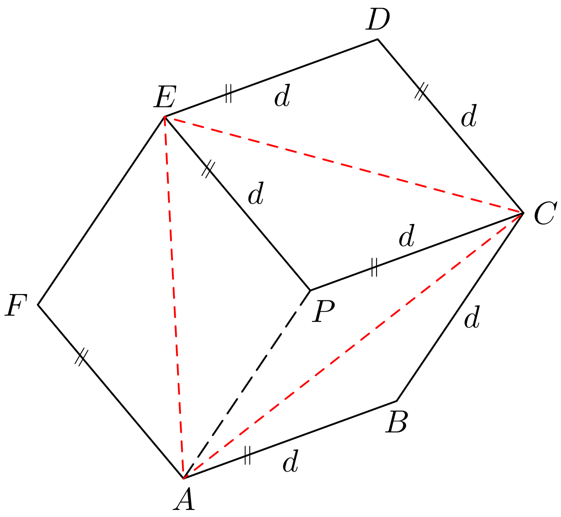
Jediné vyhovující čtyřmístné číslo je číslo 2 019.

Návodné a doplňující úlohy:

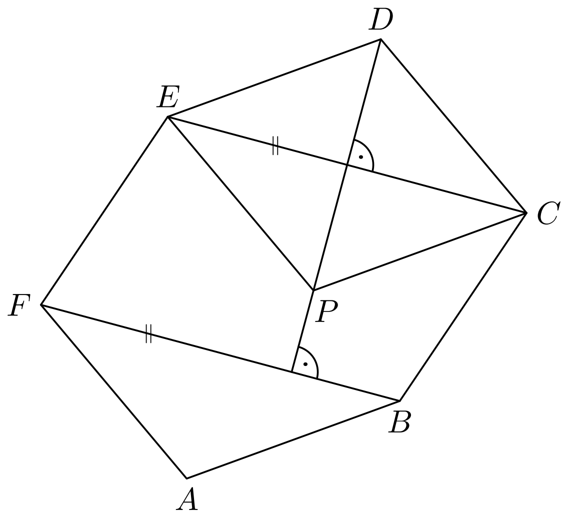
- N1. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$. [Takové číslo $\overline{abab}$ neexistuje, neboť jeho ciferný součet je sudý.]
- N2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$. [Takové číslo $\overline{ab(a-1)b}$ neexistuje, neboť jeho ciferný součet je lichý.]
- N3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 8 taková, že $\overline{ab}=\overline{cd}$. [1313, 2222, 3131, 4040]
- D1. Najděte největší a nejmenší čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 13 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=10$. [7060, 1606 — pokud připustíme zápis $\overline{06}$, jinak 2515.]
- D2. Najděte všechna osmimístná čísla $\overline{abcdefgh}$ s ciferným součtem 16 taková, že $\overline{efgh}-$ $-\overline{abcd}=1$. [Vysvětlete nejdříve, proč při sčítání $\overline{abcd}+1$ musí nastat *právě jeden* přenos jedničky do vyššího řádu, takže každé hledané číslo je tvaru $\overline{abc9\,ab(c+1)0}$. Vyhovují čísla 1029 1030, 1119 1120, 1209 1210, **2019 2020**, 2109 2110, 3009 3010.]

2. *Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod P je takový, že čtyřúhelník $CDEP$ je rovnoběžník. Dokažte, že bod P je středem kružnice opsané trojúhelníku ACE a současně i průsečíkem výšek trojúhelníku BDF.* (Jakub Löwit)

Řešení. Označme d délku stran daného šestiúhelníku. Rovnoběžník $CDEP$ je zřejmě kosočtverec, protože obě úsečky CD i DE mají stejnou délku d. Stejnou délku d mají tudíž i úsečky PC a PE. Ze zadání víme, že úsečky AB a DE jsou rovnoběžné a shodné, proto i úsečky PC a AB jsou rovnoběžné a shodné, z čehož vyplývá, že i čtyřúhelník $ABCP$ je kosočtverec se stranou délky d (obr. 1). Díky tomu dostáváme $|PA| = |PC| = |PE| = d$, a bod P je tak skutečně středem kružnice opsané trojúhelníku ACE.



Obr. 1



Obr. 2

Čtyřúhelník $BCEF$ je rovnoběžník, jelikož jeho protější strany BC a EF jsou rovnoběžné a shodné. Potom i jeho protější strany CE a BF jsou rovnoběžné. Abychom ukázali, že přímka DP je kolmá na přímku BF (obr. 2), stačí si uvědomit, že úhlopříčky kosočtverce $CDEP$ jsou navzájem kolmé. Opravdu, z kolmosti $CE \perp DP$ a rovnoběžnosti $CE \parallel BF$ vyplývá $DP \perp BF$. To vlastně znamená, že DP je přímkou výšky z vrcholu D trojúhelníku BDF. Podobně — využitím navzájem kolmých úhlopříček kosočtverce $ABCP$ a rovnoběžných protějších stran AC a DF rovnoběžníku $ACDF$ — dokážeme, že na přímce BP leží výška trojúhelníku BDF z vrcholu B. Bod P je tudíž průsečíkem výšek trojúhelníku BDF, jak jsme měli také dokázat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé a že se navzájem půlí. [Úhlopříčky jsou zároveň výškami rovnoramenných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech kosočtverce.]

N2. Ukažte, že pokud jsou dvě shodné úsečky neležící v jedné přímce rovnoběžné, tvoří jejich krajní body rovnoběžník. [Dokreslete další dvě úsečky, které s danými úsečkami vytvoří konvexní čtyřúhelník. Jeho úhlopříčka rozděluje čtyřúhelník na dva trojúhelníky, které jsou shodné podle věty *sus*.]

D1. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Ukažte, že střed úsečky CF splývá s průsečíkem přímek AD a BE. [$ACDF$ i $ABDE$ jsou rovnoběžníky.]

D2. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Označme X a Y průsečíky výšek trojúhelníků ACE a BDF. Ukažte, že v případě $X \neq Y$ střed úsečky XY půlí úsečku AD. [Z rovnoběžníků $ABDE$ a $ACDF$

vidíme, že úsečky AD, BE a CF procházejí jedním bodem. Ten určuje středovou souměrnost, v níž si odpovídají jak body A, D, tak body C, F i body E, B, a tedy i trojúhelníky ACE a DFB. Proto jsou podle středu úsečky AD souměrně sdružené nejen průsečíky výšek zmíněných trojúhelníků (jak jsme měli ukázat), ale i jejich těžiště, středy jim opsaných i středy jim vepsaných kružnic. Stejné závěry platí i pro tři další dvojice souměrně sdružených trojúhelníků (ABC, DEF), (ABF, DEC) a (AEF, DBC).]

3. *Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro něž platí*

$$2[a, b] + 3(a, b) = ab,$$

kde $[a, b]$ značí nejmenší společný násobek a (a, b) největší společný dělitel přirozených čísel a a b. (Jaroslav Švrček)

Řešení. Využitím známé rovnosti $m \cdot n = [m, n] \cdot (m, n)$, která platí pro libovolná přirozená čísla m a n, můžeme zadanou rovnici upravit do tvaru

$$2[a, b] + 3(a, b) = [a, b] \cdot (a, b).$$

Pro zjednodušení zápisu označme $u = [a, b]$ a $v = (a, b)$, kde u, v jsou přirozená čísla, pro něž zřejmě platí $u \geqq v$, neboť nejmenší společný násobek čísel a a b jistě není menší než kterýkoli jejich společný dělitel. Máme tak řešit rovnici $2u+3v = uv$, kterou k tomu upravíme na tvar

$$uv - 2u - 3v + 6 = 6 \quad \text{neboli} \quad (u - 3)(v - 2) = 6, \tag{1}$$

kde u, v jsou přirozená čísla splňující podmínku $u \geqq v$ a ovšem i podmínku $v \mid u$ (společný dělitel dělí společný násobek).

Pro $v = 1$ nevyjde u přirozené, musí tedy být $v - 2 \geqq 0$, a tudíž i $u - 3 \geqq 0$.

Číslo 6 lze napsat jako součin dvou nezáporných čísel čtyřmi způsoby:

- ▷ $6 = 6 \cdot 1$, takže $u = 9$, $v = 3$. Protože $(a, b) = 3$, můžeme psát $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$, kde $(\alpha, \beta) = 1$, tudíž $9 = [a, b] = 3[\alpha, \beta]$, což dává $\{\alpha, \beta\} = \{1, 3\}$ neboli $\{a, b\} = \{3, 9\}$.
- ▷ $6 = 3 \cdot 2$, takže $u = 6$, $v = 4$, pak ale není splněna podmínka $v \mid u$.
- ▷ $6 = 2 \cdot 3$, takže $u = 5$, $v = 5$ a $ab = [a, b](a, b) = uv = 5 \cdot 5$. Pokud se největší společný dělitel čísel a a b rovná jejich nejmenšímu společnému násobku, je $a = b = u = v$, tedy $a = b = 5$.
- ▷ $6 = 1 \cdot 6$, takže $u = 4$, $v = 8$, pak ale není splněna podmínka $u \geqq v$.

Řešeními jsou uspořádané dvojice $(a, b) \in \{(5, 5), (3, 9), (9, 3)\}$.

Jiné řešení. Označme $(a, b) = D$. Hledaná čísla pak můžeme napsat ve tvaru $a = \alpha D$, $b = \beta D$, kde α a β jsou navzájem nesoudělná přirozená čísla, takže nejmenší společný násobek vyjde jako $[a, b] = \alpha\beta D$. Dosazením do zadané rovnice a její úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta D + 3D &= \alpha D \beta D, \\ 2\alpha\beta + 3 &= \alpha\beta D, \\ 1 \cdot 1 \cdot 3 &= \alpha\beta(D - 2). \end{aligned}$$

Protože α i β jsou přirozená čísla a levá strana je kladná, musí být i $D - 2 \geqq 1$. Ze tří možných pořadí rozkladu čísla 3 na součin tří činitelů ($3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 3$) dostáváme tři řešení $(\alpha, \beta, D) \in \{(3, 1, 3), (1, 3, 3), (1, 1, 5)\}$, k nimž snadno dopočítáme uspořádané dvojice $(a, b) = (\alpha D, \beta D) \in \{(9, 3), (3, 9), (5, 5)\}$.

Jiné řešení. Pravá strana zadané rovnice je dělitelná číslem a, a proto je jím dělitelná i levá strana. I nejmenší společný násobek čísel a a b, který se vyskytuje na levé straně rovnice, je číslem a dělitelný, a proto jím musí být dělitelné i číslo $3(a, b)$. Stejná úvaha vede k závěru, že číslo $3(a, b)$ je dělitelné i číslem b, takže je celkem dělitelné číslem $[a,b]$, které je však samo vždy násobkem čísla (a,b). Vzhledem k tomu, že číslo 3 je prvočíslo, je číslo $[a,b]$ rovno buď samotnému číslu (a,b), nebo jeho trojnásobku.

První případ $[a,b]=(a,b)$ nastane, právě když $a=b$ — z rovnice $2a+3a=a^2$ pak vychází $a=5$. Druhý případ $[a,b]=3(a,b)$ s ohledem na to, že 3 je prvočíslo, nastane, právě když $\{a,b\}=\{d,3d\}$ pro vhodné přirozené d — z rovnice $2\cdot 3d+3d=3d^2$ pak vychází $d=3$. Je tedy buď $a=b=5$, nebo $\{a,b\}=\{3,9\}$.

Úloze tak vyhovují právě tři uspořádané dvojice $(3,9)$, $(9,3)$, $(5,5)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny dvojice a, b kladných celých čísel, pro něž platí $a\cdot[a,b]=4\cdot(a,b)$, přičemž symbol $[a,b]$ označuje nejmenší společný násobek a (a,b) největší společný dělitel celých kladných čísel a, b. [62–C–S–2]

N2. Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a,b]$ a největší společný dělitel (a,b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost $a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b]\geqq 2ab$. Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost. [60–C–I–5]

D1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí rovnost množin $\{a\cdot[a,b], b\cdot(a,b)\}=\{45,180\}$, přičemž (x,y) označuje největší společný dělitel a $[x,y]$ nejmenší společný násobek čísel x a y. [61–C–S–1]

D2. Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c, pro něž platí množinová rovnost $\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\}=\{2,3,5,60,90,180\}$, kde (x,y) a $[x,y]$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel x a y. [61–C–I–3]

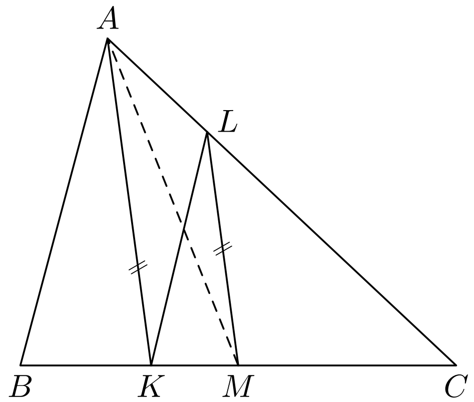
4. *Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L. Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník ABC na dvě části stejného obsahu.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Obsah trojúhelníku XYZ budeme označovat jako $S(XYZ)$.

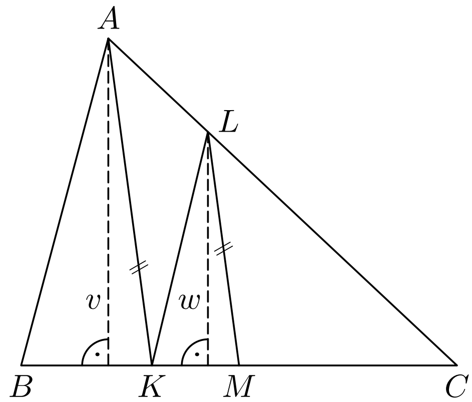
Protože podle zadání jsou body A a L různé, jsou různé i body K a M. Platí $S(KML) = S(AML)$, protože trojúhelníky KML a AML mají shodnou základnu ML i výšku na ni, neboť přímky AK a LM jsou dle předpokladu rovnoběžné (obr. 3).

Vyjdeme z toho, že těžnice AM dělí trojúhelník ABC na dva trojúhelníky BMA a CMA stejného obsahu, protože oba trojúhelníky mají stejnou výšku na shodné strany BM a CM, a využijeme i výše dokázanou rovnost $S(KML) = S(AML)$. To už stačí k tomu, abychom dokázali, že $S(KCL) = \frac{1}{2}S(ABC)$, což dává požadovanou rovnost obsahů čtyřúhelníku $BKLA$ a trojúhelníku KCL, jak ukazuje výpočet

$$\begin{aligned} S(KCL) &= S(KML) + S(LMC) = \\ &= S(AML) + S(LMC) = \\ &= S(ACM) = \frac{1}{2}S(ABC). \end{aligned}$$



Obr. 3



Obr. 4

Jiné řešení. Uvažujme číslo k určené rovností $|CK| = k|BC|$ a označme jako v vzdálenost bodu A od přímky BC (obr. 4). Z podobnosti trojúhelníků AKC a LMC plyne, že pro vzdálenost w bodu L od přímky BC platí

$$w = \frac{|CM|}{|CK|} \cdot v = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{k|BC|} \cdot v = \frac{v}{2k}.$$

Obsah trojúhelníku KCL je tudíž roven

$$S(KCL) = \frac{1}{2}|CK|w = \frac{1}{2}k|BC| \cdot \frac{v}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|BC|v = \frac{1}{2}S(ABC),$$

jak jsme měli dokázat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Přesvědčte se, že střední příčky (tj. spojnice středů stran) dělí libovolný trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. [Střední příčky jsou rovnoběžné s protilehlými stranami, a proto jsou všechny čtyři trojúhelníky podobné. Shodnost vyplývá z toho, že střední příčky půlí jednotlivé strany.]

N2. Uvědomte si, že dva trojúhelníky mají shodné obsahy, shodují-li se jak ve dvou stranách, tak i v k nim příslušných výškách. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč jedna těžnice libovolného trojúhelníku půlí jeho obsah, zatímco všechny tři těžnice dělí jeho obsah na šest stejně velkých dílů. [V trojúhelníku ABC s těžnicemi AA_1, BB_1, CC_1 a těžištěm T pro první tvrzení o těžnici AA_1 užijte pravidlo na dvojici trojúhelníků (ABA_1, ACA_1), pro druhé tvrzení o šesti dílech navíc i na dvojice (ATC_1, BTC_1), (BTA_1, CTA_1) a (CTB_1, ATB_1).]

D1. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně, mají své obsahy v poměru příslušných výšek k této straně. Užitím tohoto pravidla vysvětlete, proč tři úsečky, které spojují vrcholy trojúhelníku s jeho těžištěm, dělí jeho obsah na tři stejně velké díly, aniž přitom užijete výsledek úlohy N2. [Těžiště má od každé strany trojúhelníku třikrát menší vzdálenost než protější vrchol.]

D2. Nad přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC sestrojme čtverec $ABDE$. Zjistěte (v závislosti na délkách stran trojúhelníku), v jakém poměru rozděluje přímka výšky z vrcholu C na přeponu AB obsah čtverce $ABDE$. [Podle Eukleidovy věty o odvěsně to je $a^2 : b^2$, protože přímka výšky z vrcholu C dělí čtverec na dva obdélníky se společnou stranou.]

D3. Uvědomte si, že dva trojúhelníky, které se shodují v jedné výšce, mají své obsahy v poměru délek stran, jimž tato výška přísluší. Užitím tohoto pravidla pak dokažte tvrzení: Libovolný konvexní čtyřúhelník je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky o obsazích, které lze označit S_1, S_2, S_3 a S_4 tak, že platí $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ a že rovnost $S_2 = S_4$ nastane, právě když jsou rovnoběžné ty strany čtyřúhelníku, které náleží trojúhelníkům o obsazích S_1 a S_3. [Označíme-li dotyčné obsahy S_i čtyř trojúhelníků v kruhovém pořadí kolem jejich společného vrcholu, oba poměry $S_1 : S_2$ a $S_4 : S_3$ budou shodné s poměrem, v jakém jedna z úhlopříček čtyřúhelníku dělí jeho druhou úhlopříčku. Rovnost $S_2 = S_4$ je ekvivalentní s rovností $S_1 + S_2 = S_1 + S_4$, jež je rovností obsahů dvou trojúhelníků se společnou stranou.]

5. *Tabulku* 3×3 *máme vyplnit devíti danými čísly tak, aby v každém řádku i sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou. Rozhodněte, zda je možné takový úkol splnit s čísly*

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Pokud ano, zjistěte, kolika způsoby lze úkol splnit tak, aby největší číslo bylo uprostřed tabulky. (Jaromír Šimša)

Řešení. Součet čísel v každém řádku (i v každém sloupci) je sudý, rovná se totiž dvojnásobku největšího ze tří zapsaných čísel. Proto musí být i součet všech čísel zapsaných v tabulce sudý. Jelikož v případě a) je součet čísel roven 45, úkol nelze splnit.

Protože součet čísel v případě b) je sudý ($10 \cdot 11/2 - 1 = 54$), pokusíme se tabulku vyplnit požadovaným způsobem. Mezi danými devíti čísly je pět čísel sudých (budeme je označovat symbolem S) a čtyři lichá čísla (ta budeme označovat symbolem L). Symbolicky tedy musí v každém řádku i sloupci platit jedna z rovností $S = L + L$, $S = S + S$ nebo $L = S + L$. Pokud se podíváme na počty použitých sudých a lichých čísel v těchto rovnostech a zohledníme i to, že musíme použít víc čísel sudých než lichých, usoudíme, že aspoň jeden řádek a jeden sloupec musí být typu $S = S + S$.

Řádky naší tabulky můžeme přehazovat mezi sebou, aniž bychom porušili podmínku ze zadání. Podobně to platí pro sloupce. Můžeme proto předpokládat, že jak první řádek, tak i první sloupec obsahují pouze sudá čísla (jsou tedy typu $S = S + S$). Podívejme se na jejich společné políčko (levý horní roh tabulky), v němž musí být napsáno jedno z čísel 2, 4, 6, 8 nebo 10.

Vypíšeme pro každého z pěti kandidátů všechny příhodné rovnosti pro splnění podmínky úlohy pro první sloupec a první řádek:

$$2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8, \quad 4 = 6 - 2 = 10 - 6, \quad 6 = 2 + 4 = 8 - 2 = 10 - 4,$$
$$8 = 2 + 6 = 10 - 2, \quad 10 = 8 + 2 = 6 + 4.$$

Vidíme, že pouze čtyřku a osmičku dvěma „disjunktními" způsoby zapsat nelze, proto ve společném poli musí být napsáno jedno z čísel 2, 6 nebo 10 a tabulka potom musí být (až na pořadí řádků, sloupců a případné překlopení podle úhlopříčky) vyplněna sudými čísly jedním ze tří způsobů (hvězdičky tu označují čtyři lichá čísla 3, 5, 7, 9 zapsaná v nějakém pořadí), které budeme dále zkoumat:

2	8	10
4	*	*
6	*	*

Typ A

6	2	8
4	*	*
10	*	*

Typ B

10	4	6
2	*	*
8	*	*

Typ C

V tabulce typu A bychom v 2. a 3. sloupci museli mít $8 = 3 + 5$ a $10 = 3 + 7$, číslo 3 však nemůže být v obou sloupcích, proto požadované vyplnění tabulky typu A neexistuje.

V tabulce typu B máme ve 3. řádku a 3. sloupci opět čísla 8 a 10 a z již uvedených rovností naopak vidíme, že tabulku lze doplnit jediným vyhovujícím způsobem

6	2	8
4	9	5
10	7	3

$\rightarrow$

2	6	8
7	10	3
9	4	5

Tabulku jsme rovnou přeměnili (vzájemnou výměnou nejprve prvního sloupce s druhým a poté druhého řádku s třetím) do jednoho z možných tvarů, kdy číslo 10 stojí uprostřed tabulky, jak vyžaduje zadání úlohy.

Konečně v tabulce typu C máme v 3. řádku jedinou možnost vyjádření $8 = 5 + 3$, zatímco v 3. sloupci je to jedině $6 = 9 - 3$. Tím je určena pozice nejen čísel 3, 5 a 9, ale i zbývajícího čísla 7. Výsledná tabulka zjevně úloze nevyhovuje.

Zbývá zjistit počet různých tabulek, které lze z vyplněné tabulky typu B vytvořit tak, aby číslo 10 bylo uprostřed. V prostředním řádku či sloupci musí spolu s 10 být čísla 6 a 4, resp. 7 a 3, pro jejich umístění tak máme celkem $4 \cdot 2 = 8$ možností (šestku dáme na jedno ze čtyř polí sousedících s prostřední desítkou, čtyřka pak bude na poli protějším, sedmičku dáme na jedno ze dvou zbývajících polí sousedících s desítkou; čísla v rohových polích jsou pak už určena jednoznačně).

Jiné řešení. Ještě jedním způsobem ukážeme, že požadované vyplnění tabulky čísly 2 až 10 je (až na možné změny pořadí řádků, pořadí sloupců a překlopení tabulky podél jejích úhlopříček) jediné.

Vybereme po největším číslu z každého řádku (respektive každého sloupce) správně vyplněné tabulky, dostaneme v obou případech tři čísla, jejichž součet se musí podle zadání rovnat polovině součtu všech devíti zapsaných čísel, tedy číslu $54 : 2 = 27$, což je $10 + 9 + 8$. Proto tři vybraná čísla musejí být 10, 9 a 8, neboť každá jiná trojice zapsaných čísel má součet menší než 27. Tak jsme zjistili, že čísla 10, 9, 8 musejí být zapsaná každé v jiném řádku i v jiném sloupci. S ohledem na výše popsané změny tak můžeme předpokládat, že čísla 10, 9, 8 jsou zapsána na téže úhlopříčce tabulky jako na posledním obrázku předchozího řešení:

$*$	$*$	8
$*$	9	$*$
10	$*$	$*$

Podmínku úlohy pro řádky a sloupce s čísly 8 a 10 lze splnit jedině tak, jak vyjadřují rovnosti $8 = 2 + 6 = 3 + 5$ a $10 = 3 + 7 = 4 + 6$. Odtud plyne, že neurčená čísla ve dvou rohových polích tabulky musejí být 3 a 6 — jediná dvě čísla vystupující v uvedených vyjádřeních obou čísel 8 a 10. Umístění čísel 3 a 6 je tedy (až na možné překlopení podél úhlopříčky s čísly 10, 9, 8) dáno:

6	$*$	8
$*$	9	$*$
10	$*$	3

Umístění zbylých čísel 2, 4, 5, 7 je nasnadě i pro žáky první obecné — viz poslední tabulku z předchozího řešení před konečnou změnou pořadí řádků a sloupců.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku bylo sudé číslo? [Ne, protože pak by musel být i součet všech čísel sudý a $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.]

N2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $2, 3, \ldots, 10$ tak, aby v každém řádku bylo největší číslo součtem ostatních dvou? [Ano, vyhovuje například vyplnění řádků trojicemi čísel $(2, 6, 8)$, $(4, 5, 9)$ a $(3, 7, 10)$ v jakémkoli pořadí.]

N3. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $4, 5, \ldots, 12$ tak, aby v každém sloupci bylo největší číslo součtem ostatních dvou? [Ne. Součet všech 9 čísel je 72, takže součet tří sloupcových maxim by musel být 36, což je více než $10 + 11 + 12$.]

D1. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součin čísel v každém řádku byl druhou mocninou nějakého přirozeného čísla? [Ne, protože součin zadaných čísel není druhou mocninou.]

D2. Je možné vyplnit tabulku 3×3 čísly $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby součet čísel v každém řádku a v každém sloupci byl nějakým prvočíslem? [Ano, jedno z řešení je zleva doprava a shora dolů s čísly po řadě 1, 3, 7, 6, 9, 2, 4, 5, 8.]

6. *Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \leqq 1$. Najděte největší možnou hodnotu součtu $a+b+c$.* (Ján Mazák)

Řešení. Při řešení tohoto úkolu je užitečné hledat vztah mezi dvěma zadanými výrazy. První z nich $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ obsahuje druhé mocniny proměnných, přičemž druhý $a+b+c$ pouze první mocniny. Jeho umocněním však dostaneme

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac). \tag{1}$$

Výrazy $a^2+b^2+c^2$ a $ab+bc+ac$ jsou navíc ve vzájemném vztahu, totiž

$$ab+bc+ac \leqq a^2+b^2+c^2, \tag{2}$$

jak snadno odvodíme ze zřejmé nerovnosti $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$.

Získaná nerovnost (2) nám spolu s danou nerovností umožňuje psát

$$2(ab+bc+ac) \leqq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac \leqq 1,$$

takže

$$ab+bc+ac \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Když nyní šikovně dosadíme do rovnosti (1) tak, abychom zároveň využili i danou nerovnost, dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = \\ &= a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ac)+(ab+bc+ac) \leqq 1+\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

A protože čísla a, b, c jsou kladná, dostáváme odhad

$$a+b+c \leqq \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Zbývá ukázat, že tuto hodnotu lze také dosáhnout. Nejjednodušší možností je vyzkoušet $a=b=c$ (neboť pak nerovnost (2) přejde v rovnost). V tomto případě z dané nerovnosti vyjde $6a^2 \leqq 1$ s rovností pro $a=b=c=1/\sqrt{6}$, pro kteréžto hodnoty opravdu vychází $a+b+c=\sqrt{3/2}$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro kladná čísla a, b, c platí $a^2+b^2+ab \leqq 2$. Najděte největší možnou hodnotu součinu ab. [Využijte odhad $2ab \leqq a^2+b^2$, největší hodnota $ab = 2/3$ se dosáhne pro $a=b=\sqrt{2/3}$.]

N2. Dokažte nerovnost $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ a zjistěte, kdy v ní nastává rovnost. [Pronásobíme dvěma a upravíme do tvaru $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$, rovnost nastane, právě když $a=b=c$.]

N3. Reálná čísla a, b, c mají součet 3. Dokažte, že $3 \geqq ab+bc+ca$. Kdy nastane rovnost? [Plyne z rovnosti $9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ a z předešlé úlohy. Rovnost nastane jedině v případě $a=b=c=1$.]

D1. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost $a^2+b^2+c^2+3abc < 9$. [68–C–I–3]

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu $V=(a^4+b^4+ab+1)/(a+b)$. [68–B–I–4]