69. ročník matematické olympiády
Úlohy ústředního kola kategorie A

1. Na tabuli jsou napsána dvě kladná celá čísla m a n. V každém kroku jedno ze dvou čísel na tabuli nahradíme buď jejich součtem, nebo součinem, anebo podílem (je-li celočíselný). V závislosti na číslech m a n určete všechny dvojice, které se mohou na tabuli po několika krocích objevit.

2. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran AB a AC jsou po řadě zvoleny body X a Y. Označme Z průsečík úseček BY a CX. Dokažte nerovnost

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

kde $[DEF]$ značí obsah trojúhelníku DEF.

3. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 3y + p &= z, \\ y^2 - 3z + p &= x, \\ z^2 - 3x + p &= y \end{aligned}$$

s reálným parametrem p.

a) Pro $p \geqq 4$ řešte uvažovanou soustavu v oboru reálných čísel.

b) Dokažte, že pro $p \in \langle 1, 4)$ každé reálné řešení soustavy splňuje rovnosti $x = y = z$.

4. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla.

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, uvnitř které je zvolen bod D. Nechť E, F jsou po řadě takové body na stranách AB, AC, že platí $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DFC| > 90°$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF a AEC se protínají na přímce AD v bodě různém od bodu A.

6. Pro každé přirozené číslo k označme $P(k)$ počet všech $4k$-místných čísel, která lze sestavit z číslic 2, 0 a která jsou dělitelná číslem 2 020. Dokažte nerovnost

$$P(k) \geqq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určete všechna k, pro něž nastane rovnost.

Ústřední kolo plánované na 22. až 25. března 2020 se neuskutečnilo z důvodu nouzového stavu v České republice. Postupující do ústředního kola řešili jeho úlohy v internetovém klání konaném 29. a 30. června 2020.

1. *Na tabuli jsou napsána dvě kladná celá čísla m a n. V každém kroku jedno ze dvou čísel na tabuli nahradíme buď jejich součtem, nebo součinem, anebo podílem (je-li celočíselný). V závislosti na číslech m a n určete všechny dvojice, které se mohou na tabuli po několika krocích objevit.* (Radovan Švarc)

Řešení. Dokážeme, že pro $m = n = 1$ se na tabuli může objevit libovolná dvojice kladných celých čísel a že pro ostatní volby m a n existuje přesně jedna dvojice, jíž nelze dosáhnout, a to $(1, 1)$.

Předně je jasné, že obě čísla napsaná na tabuli budou vždy kladná a celá. Dále si ujasníme, z jakých dvojic je možné jedním krokem získat dvojici $(1, 1)$. Jelikož lze jednou operací změnit jen jedno z čísel, musí být taková dvojice bez újmy na obecnosti tvaru $(k, 1)$. Jejím následovníkem mohou být ale pouze dvojice $(k+1, 1)$, $(k, k+1)$ (nahrazení součtem) a (k, k) (nahrazení součinem či podílem). Jediné vyhovující k je tak $k = 1$. Jinými slovy, dvojice $(1, 1)$ lze dosáhnout, pouze pokud je na tabuli napsána od začátku.

Nyní učiníme zásadní pozorování. Pokud máme dvojici (a, b), můžeme postupně napsat dvojice

$$(a, b) \to (a, ab) \to (a, ab + a) \to (a, b + 1),$$

a přičíst tak k b jedničku. Analogicky lze jedničku přičíst i k a.

K vyřešení úlohy stačí dokázat, že z libovolné dvojice (a, b) lze dosáhnout dvojic $(1, 2)$ a $(2, 1)$, neboť pak lze přičítáním jedniček dosáhnout všech dvojic přirozených čísel s výjimkou již diskutované dvojice $(1, 1)$.

Uvažme dvojici (a, b), v níž bez újmy na obecnosti platí $a \geqq b$. Přičítáním jedniček nejprve získáme $(a, 2a)$, odkud při dělení obdržíme $(a, 2)$. Nyní nalezneme nejmenší celé číslo k, pro něž $a < 2^k$ a přičítáním jedniček přejdeme k $(2^k, 2)$. Dále postupným dělením vychází

$$(2^k, 2) \to (2^{k-1}, 2) \to (2^{k-2}, 2) \to \ldots \to (4, 2) \to (2, 2).$$

Nyní lze vydělením vytvořit obě dvojice $(2, 1)$ a $(1, 2)$, čímž je úloha vyřešena.

2. *Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran AB a AC jsou po řadě zvoleny body X a Y. Označme Z průsečík úseček BY a CX. Dokažte nerovnost*

$$[BZX] + [CZY] > 2[XYZ],$$

kde $[DEF]$ značí obsah trojúhelníku DEF. (David Hruška, Josef Tkadlec)

Řešení. Do levé strany ekvivalentně upravené nerovnosti

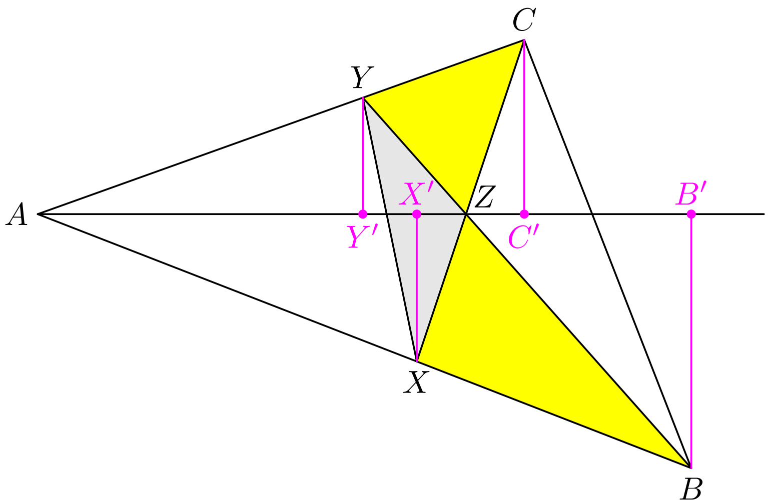
$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} + \frac{[CZY]}{[XYZ]} > 2$$

dosadíme vyjádření

$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} = \frac{|BZ|}{|YZ|} \quad \text{a} \quad \frac{[CZY]}{[XYZ]} = \frac{|CZ|}{|XZ|},$$

která jsou obě porovnáním obsahů a základen dvou trojúhelníků se společnou výškou (obr. 1). Naší úlohou tak je dokázat nerovnost

$$\frac{|BZ|}{|YZ|} + \frac{|CZ|}{|XZ|} > 2.$$



Obr. 1

Kolmé průměty bodů B, C, X, Y na přímku AZ označíme B', C', X', Y' jako na obr. 1. Potom můžeme dokazovanou nerovnost přepsat jako

$$\frac{|BB'|}{|YY'|} + \frac{|CC'|}{|XX'|} > 2.$$

Nyní stačí použít AG nerovnost a nerovnosti $|BB'|/|XX'| > 1$ a $|CC'|/|YY'| > 1$, které zřejmě plynou z volby bodů X, Y uvnitř stran AB, AC. Dostáváme tak

$$\frac{|BB'|}{|YY'|} + \frac{|CC'|}{|XX'|} \geqq 2\sqrt{\frac{|BB'|}{|YY'|} \cdot \frac{|CC'|}{|XX'|}} = 2\sqrt{\frac{|BB'|}{|XX'|} \cdot \frac{|CC'|}{|YY'|}} > 2.$$

Jiné řešení. Využijeme poměrně známou rovnost

$$[XYZ] \cdot [BCZ] = [BZX] \cdot [CZY],$$

která platí pro *libovolný* konvexní čtyřúhelník $BCYX$ (s bodem Z v průsečíku úhlopříček, obr. 1) a kterou díky společné hodnotě sinů čtyř úhlů XZY, BZC, BZX, CZY okamžitě dostaneme po čtyřnásobném užití školního vzorce $[ABC] = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Ve spojení s AG-nerovností pak máme

$$[BZX] + [CZY] \geqq 2\sqrt{[BZX] \cdot [CZY]} = 2\sqrt{[XYZ] \cdot [BCZ]},$$

proto nám v naší situaci zbývá ověřit pouze nerovnost $[BCZ] > [XYZ]$. Po přičtení $[BXZ]$ k oběma jejím stranám dostaneme ovšem nerovnost $[BXC] > [BXY]$, která zřejmě platí, neboť bod C má od přímky BX větší vzdálenost nežli bod Y (díky tomu, že Y leží mezi body A a C).

Jiné řešení. Zaveďme tři kladná čísla

$$\alpha = \frac{[BZC]}{[ABC]}, \quad \beta = \frac{[CZA]}{[ABC]}, \quad \gamma = \frac{[AZB]}{[ABC]},$$

pro něž zjevně platí $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Navíc je

$$\frac{[BZX]}{[XYZ]} = \frac{|BZ|}{|ZY|} = \frac{|BY|}{|ZY|} - 1 = \frac{[ABC]}{[CZA]} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1,$$

kde v první rovnosti jsme využili společné výšky, zatímco v třetí rovnosti společné základny obou dotyčných trojúhelníků. Podobně lze odvodit, že

$$\frac{[CZY]}{[XYZ]} = \frac{1}{\gamma} - 1,$$

a dokazovanou nerovnost lze tak po vydělení číslem $[XYZ]$ (a přičtení dvojky) ekvivalentně přepsat jako

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > 4.$$

Ta však s ohledem na $\beta + \gamma < 1$ již plyne ze známé (Cauchyovy) nerovnosti:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} > \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)(\beta + \gamma) \geqq 4.$$

3. *Uvažujme soustavu rovnic*

$$x^2 - 3y + p = z,$$
$$y^2 - 3z + p = x,$$
$$z^2 - 3x + p = y$$

s reálným parametrem p.

a) Pro $p \geqq 4$ řešte uvažovanou soustavu v oboru reálných čísel.

b) Dokažte, že pro $p \in \langle 1, 4)$ každé reálné řešení soustavy splňuje rovnosti $x = y = z$. (Jaroslav Švrček)

Řešení. Sečteme-li zadané rovnice, získáme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 3p = 0,$$

což lze doplněním na čtverce upravit do tvaru

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 + 3p - 12 = 0.$$

Je-li $p > 4$, je levá strana kladná a rovnost nastat nemůže. Pro $p = 4$ je nutně $x = y = z = 2$, což je i řešení původní soustavy. Tím jsme vyřešili část (a).

Pro případ $p \in \langle 1, 4)$ nejprve ukážeme, že x, y a z jsou nezáporná reálná čísla. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $y < 0$. Pak z první a třetí rovnice odvodíme

$$x^2 - z + p < 0, \tag{1}$$
$$z^2 - 3x + p < 0, \tag{2}$$

odkud s ohledem na $p > 0$ plyne, že $x > 0$, $z > 0$. Zároveň ovšem platí nerovnosti

$$x^2 - z + p < 0 \leqq (x - \sqrt{p})^2,$$
$$z^2 - 3x + p < 0 \leqq (z - \sqrt{p})^2,$$

Porovnáním levých a pravých stran s ohledem na $p \geqq 1$ získáme

$$z > 2x\sqrt{p} \geqq 2x,$$
$$x > \frac{2}{3}z\sqrt{p} \geqq \frac{2}{3}z.$$

Obojí pro kladná x, z není možné, a tím jsme dovedli předpoklad $y < 0$ ke sporu.

Dále můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x \geqq y \geqq 0$ a $x \geqq z \geqq 0$. Pak platí $x^2 \geqq z^2$, $-3y \geqq -3x$, a proto

$$z = x^2 - 3y + p \geqq z^2 - 3x + p = y.$$

Je tudíž $x \geqq z \geqq y \geqq 0$. To však znamená, že $-3y \geqq -3z$ a současně $x^2 \geqq y^2$. Potom

$$z = x^2 - 3y + p \geqq y^2 - 3z + p = x,$$

tedy $z \geqq x$, a proto $x = z$. Odečtením třetí rovnice od první (v původní soustavě) dostáváme s ohledem na rovnost $x = z$ vztah $3(x - y) = x - y$, z něhož ovšem plyne $x = y$. Opravdu tak platí $x = y = z$.

Jiné řešení. V tomto řešení ukážeme, že soustava nemá jiná řešení než ta, pro něž $x = y = z$, dokonce při libovolném $p > -10$. Jelikož v případě rovnosti dvou neznámých lze jako v samotném závěru prvního řešení dokázat rovnost všech tří, stačí nám pro spor předpokládat, že uvažovaná soustava má řešení (x, y, z) s navzájem různými čísly x, y a z.

Rozdíl prvních dvou rovnic upravíme do tvaru

$$(x - y)(x + y) = 3y - 2z - x,$$

jehož pravou stranu lze upravit dvěma způsoby jako

$$3y - 2z - x = \begin{cases} (y - x) + 2(y - z), \\ 3(y - x) + 2(x - z). \end{cases}$$

Rozdíl prvních dvou rovnic lze tak přepsat dvěma způsoby

$$(x - y)(x + y + 1) = 2(y - z),$$
$$(x - y)(x + y + 3) = 2(x - z).$$

Po sestavení dalších dvou analogických dvojic rovností (odpovídajících rozdílům jiných dvou rovnic) mezi sebou vynásobíme tři rovnosti jednoho typu a další tři rovnosti druhého typu, čímž po vykrácení nenulových rozdílů neznámých (díky předpokladu $x \neq y \neq z \neq x$) získáme

$$(x + y + 1)(y + z + 1)(z + x + 1) = 8,$$
$$(x + y + 3)(y + z + 3)(z + x + 3) = -8.$$

Levé strany obou těchto rovností jsou symetrické funkce proměnných x, y, z. Třetí takovou rovnost obdržíme sečtením všech tří původních rovnic:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + y + z) + 3p = 0.$$

Technickou náročnost situace nyní zmírníme přechodem k proměnným

$$a = x + y + 1,$$
$$b = y + z + 1,$$
$$c = z + x + 1,$$

přičemž naším cílem bude přepsat trojici symetrických rovnic pouze pomocí elementárních symetrických polynomů

$$\alpha = a + b + c,$$
$$\beta = ab + bc + ca,$$
$$\gamma = abc.$$

Po chvíli úprav skutečně získáme soustavu rovnic

$$\gamma = 8,$$
$$\gamma + 2\beta + 4\alpha = -16,$$
$$3\alpha^2 - 8\beta - 10\alpha + 12p = -27.$$

Z prvních dvou rovnic lze vyjádřit $\beta = -12 - 2\alpha$, což po dosazení do třetí rovnice vede k jejímu zjednodušení na tvar

$$\alpha^2 + 2\alpha + 41 + 4p = 0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$4 - 4(41 + 4p) = -16p - 160,$$

což je pro $p > -10$ záporný výraz, a máme tak kýžený spor s předpokládanou existencí řešení s navzájem různými čísly x, y a z.

Poznámka. Pro $p = -10$ má soustava řešení (x, y, z) s přibližnými hodnotami $(-0{,}21; -4{,}08; 2{,}30)$ (a jeho cyklické obměny), což jsou kořeny jistého konkrétního kubického polynomu (příslušná čísla a, b, c jsou kořeny polynomu $P(t) = t^3 + t^2 - 10t - 8$). Pro $p = -11$ má soustava dokonce celočíselné řešení $(-1, -4, 2)$.

4. *Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2+ab+b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla.* (Patrik Bak)

Řešení. Označme d největší společný dělitel čísel a, b. Pak platí, že $a = da_1$, $b = db_1$ pro nějaká nesoudělná přirozená čísla a_1, b_1. Rovnost ze zadání proto lze (po vydělení číslem d) psát jako

$$db_1^2 = da_1^2 + da_1b_1 + b_1.$$

Protože d dělí levou stranu této rovnosti, musí dělit i tu pravou, což nastane, právě když $d \mid b_1$. Obdobně platí, že b_1 dělí levou stranu, a tedy i tu pravou neboli $b_1 \mid da_1^2$. Jelikož čísla a_1 a b_1 jsou nesoudělná, musí platit $b_1 \mid d$. Ze vzájemné dělitelnosti $d \mid b_1$ a $b_1 \mid d$ tudíž plyne, že $d = b_1$. Je proto $b = db_1 = b_1^2$, což je druhá mocnina přirozeného čísla, a důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Protože přirozené číslo a je řešením kvadratické rovnice $x^2+xb+b-b^2 = 0$, je diskriminant této rovnice $b^2 - 4(b - b^2) = b(5b - 4)$ roven druhé mocnině nějakého přirozeného čísla k.

Největší společný dělitel d čísel b a $5b-4$ je zřejmě dělitelem i čísla 4. Proto připadají v úvahu pouze hodnoty $d \in \{1, 2, 4\}$.

Je-li $d = 1$, jsou čísla b a $5b - 4$ nesoudělná, a rovnost $b(5b - 4) = k^2$ tak znamená, že obě tato čísla (a speciálně číslo b) jsou druhé mocniny nějakého přirozeného čísla.

Je-li $d = 4$, lze psát $b = 4r$ a pak

$$k^2 = b(5b - 4) = 4r(20r - 4) = 16r(5r - 1).$$

Druhými mocninami jsou tedy nejen čísla k^2 a $16 = 4^2$, ale i hodnota součinu $r(5r - 1)$ dvou zjevně nesoudělných čísel, a tudíž druhými mocninami jsou i oba činitelé. Pro jisté přirozené číslo m tak platí $r = m^2$, odkud $b = 4r = 4m^2$ neboli $b = (2m)^2$.

Nakonec ukážeme, že zbylý případ $d = 2$ nastat nemůže. Obdobně jako v předchozím případě odvodíme, že $\frac{1}{2}b = p^2$ a $\frac{1}{2}(5b - 4) = q^2$ pro nějaká přirozená čísla p a q. Eliminací b získáme rovnost $q^2 = 5p^2 - 2$, v níž pravá strana dává zbytek 3 při dělení pěti. Ovšem druhá mocnina přirozeného čísla dává vždy jeden ze zbytků 0, 1, 4, a případ $d = 2$ tak skutečně nemůže nastat.

Tím jsme dokázali, že b je druhou mocninou přirozeného čísla.

Poznámka. Příklady $(2, 4)$ a $(15, 25)$ dvojic (a, b) ukazují, že čísla ze zadání skutečně existují.

5. *Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, uvnitř které je zvolen bod D. Nechť E, F jsou po řadě takové body na stranách AB, AC, že platí $|\sphericalangle BED| = |\sphericalangle DFC| > 90^\circ$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF a AEC se protínají na přímce AD v bodě různém od bodu A.*

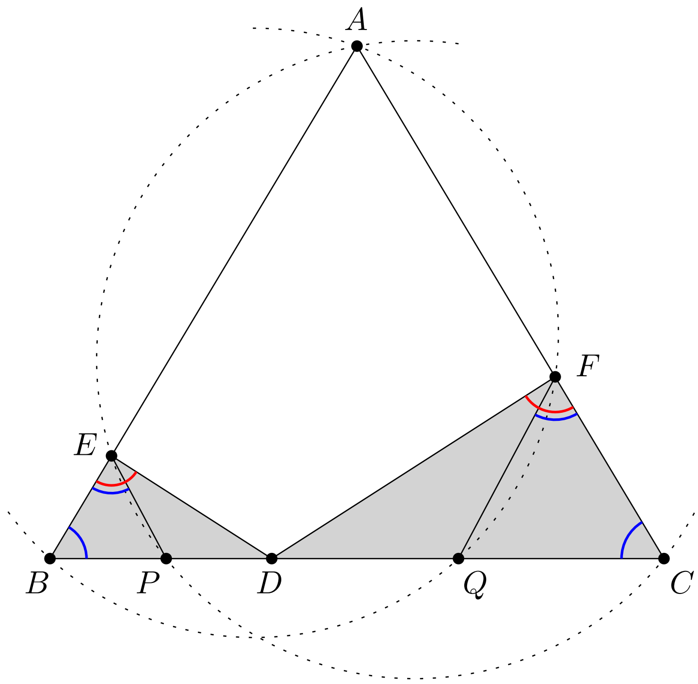
(Patrik Bak, Michal Rolínek)

Řešení. Dokážeme, že bod D má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Podle známého tvrzení o *chordále* je množinou takových bodů přímka, na níž v případě protínajících se kružnic leží oba průsečíky. Bod D tak bude ležet na této spojnici, což je jen jiná formulace dokazovaného tvrzení.

Označme P průsečík kružnice opsané trojúhelníku AEC s úsečkou BC (obr. 2). Potom z tětivového čtyřúhelníku $AEPC$ získáme

$$|\sphericalangle BEP| = 180^\circ - |\sphericalangle PEA| = |\sphericalangle ACP|$$

a z rovnoramennosti trojúhelníku ABC dále také $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle PBE|$. Celkem tak máme $|\sphericalangle BEP| = |\sphericalangle PBE|$, a platí tak $|PB| = |PE|$. Obdobně pro průsečík Q kružnice opsané trojúhelníku AFB s úsečkou BC platí $|QC| = |QF|$. Jelikož podle zadání jsou oba úhly BED a CFD tupé, leží body P a Q uvnitř odpovídajících úseček DB a DC, což zároveň znamená, že bod D leží uvnitř obou příslušných kruhů.



Obr. 2

Všimněme si, že trojúhelníky BED a CFD jsou podobné podle věty *uu* a bodu P přitom odpovídá bod Q. Proto označíme-li k koeficient této podobnosti, platí

$$|DB| \cdot |DQ| = \frac{1}{k}|DC| \cdot k|DP| = |DC| \cdot |DP|.$$

Bod D tak má stejnou mocnost ke kružnicím opsaným trojúhelníkům ABF a AEC, jak jsme chtěli dokázat.

6. *Pro každé přirozené číslo k označme $P(k)$ počet všech $4k$-místných čísel, která lze sestavit z číslic 2, 0 a která jsou dělitelná číslem 2 020. Dokažte nerovnost*

$$P(k) \geqq \binom{2k-1}{k}^2$$

a určete všechna k, pro něž nastane rovnost. (Jaromír Šimša)

Řešení. Všechna vyhovující $4k$-místná čísla jsou tvaru $2 \cdot J$, kde J je libovolné $4k$-místné číslo sestavené z číslic 1 a 0, které je dělitelné číslem $1\,010 = 10 \cdot 101$. Hodnota $P(k)$ tak udává počet takových $4k$-místných čísel J sestavených z číslic 1 a 0, která končí číslicí nula a která jsou dělitelná číslem 101.

$4k$-místné číslo $J = \overline{c_{4k-1}c_{4k-2}\dots c_1c_0}$ dává při dělení číslem 101 stejný zbytek jako číslo

$$S(J) = s_0 + 10s_1 - s_2 - 10s_3 = (s_0 - s_2) + 10(s_1 - s_3), \tag{1}$$

kde

$$s_0 = c_0 + c_4 + \dots + c_{4k-4}, \quad s_1 = c_1 + c_5 + \dots + c_{4k-3},$$
$$s_2 = c_2 + c_6 + \dots + c_{4k-2}, \quad s_3 = c_3 + c_7 + \dots + c_{4k-1}.$$

Plyne to z toho, že mocniny 10^{4i}, 10^{4i+1}, 10^{4i+2}, 10^{4i+3} dávají při dělení číslem 101 po řadě stejné zbytky jako čísla 1, 10, -1, -10, což je snadné ověřit indukcí vzhledem k celému číslu $i \geqq 0$.

Pro splnění podmínky $101 \mid S(J)$ podle (1) jistě stačí, aby platila silnější podmínka

$$s_0 - s_2 = 0 \quad \text{a} \quad s_1 - s_3 = 0. \tag{2}$$

Při daném k určíme počet takových čísel J s číslicemi $c_i \in \{1, 0\}$, pro něž kromě (2) platí $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$ (aby skutečně šlo o $4k$-místné číslo dělitelné deseti). Upravíme-li rovnosti (2) s dosazenými hodnotami c_{4k-1}, c_0 do tvaru

$$0 + c_4 + c_8 + \dots + c_{4k-4} + (1 - c_2) + (1 - c_6) + \dots + (1 - c_{4k-2}) = k,$$
$$c_1 + c_5 + \dots + c_{4k-3} + (1 - c_3) + (1 - c_7) + \dots + (1 - c_{4k-5}) + 0 = k,$$

dojdeme podle kombinatorického pravidla součinu k závěru, že hledaný počet je roven číslu

$$\binom{2k-1}{k}^2.$$

To platí, neboť na levých stranách upravených rovností tvoří sčítanci libovolnou permutaci k jedniček a k nul, u které je ovšem jedna pozice nuly (na úplném začátku či konci) zadána. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána.

Ve druhé části řešení ukážeme, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $k \leqq 9$. Pro každé k totiž díky podmínkám $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$ součty s_i splňují nerovnosti

$$0 \leqq s_0 \leqq k - 1, \quad 0 \leqq s_1 \leqq k, \quad 0 \leqq s_2 \leqq k, \quad 1 \leqq s_3 \leqq k.$$

Podle nich pro oba rozdíly $d_0 = s_0 - s_2$ a $d_1 = s_1 - s_3$ platí $-k \leqq d_i \leqq k - 1$, odkud pro součet $S(J)$ z (1) plynou odhady $-11k \leqq S(J) \leqq 11(k-1)$. V případě $k \leqq 9$ to zřejmě znamená, že $101 \mid S(J)$, právě když $S(J) = 0$ neboli $d_0 = -10d_1$. To pak ovšem nastane jedině tak, že $d_0 = d_1 = 0$, neboť obecné odhady čísla d_0 pro $k \leqq 9$ vedou k nerovnostem $-9 \leqq d_0 \leqq 8$, takže $10 \mid d_0$ pouze pro $d_0 = 0$.

Zbývá pro každé $k \geqq 10$ uvést příklad vyhovujícího čísla J, pro něž je $S(J)$ nenulový násobek čísla 101, kupř. $S(J) = -101$. Poslední platí, pokud $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 = 1$ a $s_3 = 10$. Že lze takové číslice $c_i \in \{1, 0\}$ pro každé $k \geqq 10$ vybrat (aby přitom platilo $c_{4k-1} = 1$ a $c_0 = 0$), je zřejmé: za jedničky zvolíme pouze jeden sčítanec v součtu s_2 a sčítanec c_{4k-1} a libovolných devět dalších v součtu s_3.