14. Středoevropská matematická olympiáda

Online

14th Middle European
Mathematical Olympiad 2020

Letošní Středoevropská matematická olympiáda proběhla tak jako v minulých letech na přelomu srpna a září. V důsledku epidemiologických opatření v jednotlivých zúčastněných zemích se však od předešlých ročníků v mnohém lišila. Soutěž proběhla virtuálně a výjimečně její organizaci nezajišťovala jedna hostitelská země, nýbrž organizační tým v mezinárodním složení. Soutěžící pak zadané úlohy řešili v závislosti na podmínkách v jednotlivých zemích buďto ze svých domovů (jako v případě českého družstva), anebo na jednom místě ve své zemi za přítomnosti svých vedoucích. Do soutěže se zapojilo celkem 60 soutěžících z deseti evropských zemí: Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

Český tým tvořili *Vojtěch David* z Wichterlova gymnázia v Ostravě-Porubě, *Jiří Kalvoda* a *Zdeněk Pezlar* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Matouš Šafránek* z gymnázia Jana Keplera v Praze a *Karel Stehlík* a *Adéla Karolína Žáčková* z gymnázia Christiana Dopplera v Praze. Vedoucími této delegace pak byli *Pavel Šalom* a *Matěj Doležálek*. Českou stopu v soutěži zanechal i *Josef Tkadlec* jakožto člen úlohové komise.

Na rozdíl od „běžného“ ročníku MEMO se nekonala týmová soutěž a soutěžící se tak utkali pouze v soutěži individuální. V ní řešili po dobu 5 hodin čtyři úlohy, po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel, za každou z nichž mohli získat až 8 bodů. Ze všech soutěžících pak medaile obdržela zhruba polovina, a to tak, aby poměr zlatých, stříbrných a bronzových medailí byl přibližně 1 : 2 : 3.

Přehled výsledků českého družstva uvádíme v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	Body	Cena
5.–9.	Jiří Kalvoda	8	8	0	8	24	S
11.–12.	Matouš Šafránek	8	8	0	6	22	S
17.–19.	Karel Stehlík	3	8	0	8	19	B
26.–27.	Zdeněk Pezlar	0	8	3	4	15	B
41.–42.	Vojtěch David	0	2	0	8	10	HM
43.–48.	Adéla Karolína Žáčková	0	8	0	1	9	HM
	Celkem	19	42	3	35	99	

Výprava tak celkem získala dvě stříbrné medaile, dvě bronzové medaile a dvě čestná uznání, jež se udělují za úplné vyřešení alespoň jedné úlohy. Pro zajímavost uveďme i výsledky slovenského družstva:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	Body	Cena
5.–9.	Viktor Balan	8	8	0	8	24	S
15.–16.	Norbert Micheľ	6	6	0	8	20	S
22.–25.	Csaba Daniel Farkaš	0	6	2	8	16	B
26.–27.	Štefan Slavkovský	3	8	0	4	15	B
28.	Jakub Šošovička	0	8	0	6	14	B
54.–56.	Matúš Zelko	0	4	0	3	7	
	Celkem	17	40	2	37	96	

Absolutním vítězem soutěže se stal *Antoni Buraczewski* z Polska, který jako jediný získal plný počet 32 bodů. Nejtěžší se ukázala býti třetí úloha (geometrie), jejíž úplné vyřešení se povedlo pouze dvěma soutěžícím. Podrobné výsledky lze nalézt na stránkách soutěže:

`https://memo2020.memo-official.org/?page_id=316`

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Označme $\mathbb{N}$ množinu kladných celých čísel. Najděte všechna kladná celá čísla k, pro které existují funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že g nabývá nekonečně mnoha hodnot a rovnost

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

platí pro všechna kladná celá čísla n.

Poznámka. Zápisem f^i značíme funkci f aplikovanou i-krát, tj. $f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f(}_{i\text{-krát}}j))\ldots))$. (*Chorvatsko*)

2. Kladné celé číslo N nazveme *nakažlivé*, pokud existuje 1000 po sobě jdoucích nezáporných celých čísel takových, že součet všech jejich číslic je roven N. Najděte všechna nakažlivá kladná celá čísla. (*Rakousko*)

3. Budiž ABC ostroúhlý různostranný trojúhelník s kružnicí opsanou ω a označme I střed kružnice jemu vepsané. Předpokládejme, že ortocentrum H trojúhelníku BIC leží uvnitř ω. Označme M střed delšího oblouku BC kružnice ω. Dále označme N střed kratšího oblouku AM kružnice ω.

Dokažte, že existuje kružnice, jež se dotýká ω v bodě N a dále se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům BHI a CHI. (*Polsko*)

4. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro něž existují kladná celá čísla x_1, x_2, …, x_n taková, že

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

(*Chorvatsko*)