9. (virtuální) Evropská dívčí matematická olympiáda

Devátý ročník Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO) se uskutečnil ve dnech 15. – 21. dubna 2020. Vzhledem k současné pandemii covid-19 nizozemští organizátoři zvažovali několik možností, nakonec se rozhodli soutěž uspořádat v původním termínu virtuálně. Podle možností jednotlivých zemí se buď týmy ve své zemi sešly na jednom místě, kde soutěž řešily pod dohledem vedoucích, nebo (jako v případě České republiky) účastnice řešily soutěž doma pod dohledem dospělého dohlížitele. Soutěže se zúčastnilo rekordních 203 žákyň z (rekordních) 53 zemí pěti kontinentů, mezi nimi bylo 39 evropských států.

České reprezentační družstvo středoškolaček bylo sestaveno na základě výsledků krajských kol kategorie A 69. ročníku české MO po centrální koordinaci. Vzhledem k loňské situaci, kdy se kvůli termínu maturit nemohly soutěže zúčastnit žákyně maturitních ročníků, nebylo velkým překvapením, že čtveřice účastnic letošního ročníku byla stejná jako loni. Místa v reprezentaci si vybojovaly: *Adéla Heroudková* (6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (7/8, G J. Keplera, Praha 6), *Michaela Svatošová* (8/8, G M. Koperníka, Bílovec) a *Adéla Karolína Žáčková* (6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucím české delegace a zástupcem v mezinárodní jury byl *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* z MFF UK v Praze, pedagogickým vedoucím pak *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z PřF UP v Olomouci.

Absolutní vítězkou soutěže se stala *Amina Abu Shanab* z Rumunska. Našim reprezentantkám se podařilo zopakovat velmi dobré loňské výsledky. *Magdaléna Mišinová* obhájila v této prestižní soutěži loňskou zlatou medaili, což v celkovém pořadí znamenalo (dělené) 7. místo absolutně a (dělené) 6. místo mezi evropskými účastnicemi (vloni 8./7.). Zbylé reprezentantky stejně jako vloni obsadily místa těsně pod hranicí bronzové medaile. Nejlepší z nich byla *Michaela Svatošová*, která získala dělené 113. místo absolutně, 83. v Evropě, a navíc obdržela čestné uznání za úplné řešení alespoň jedné úlohy (vloni 130./94. a ČU), stejné místo obsadila také *Adéla Karolína Žáčková*, ovšem již bez čestného uznání (vloni 137./99. a ČU). Oběma chyběl k zisku bronzové medaile jediný bod stejně jako vloni *Adéle Heroudkové*, která se letos umístila na 146. místě absolutně a 105. mezi Evropankami (vloni 113./81. a ČU). V oficiálním pořadí zemí tak Česká republika získala 19. místo absolutně, což znamenalo 14. místo mezi evropskými zeměmi, a nepatrně tak vylepšila loňské umístění (22./16.). Vítězkami v pořadí zemí se letos staly ruské žákyně. Podrobnější informace o výsledcích soutěže najdete v oficiální výsledkové listině.

Vzhledem k pandemii připravili nizozemští organizátoři pro soutěžící bohatý virtuální program, kterého se všichni mohli zúčastnit pomocí aplikací na sociálních sítích. Nechyběl v něm ani tradiční tradiční nástup zemí, ani závěrečný ceremoniál, mimo to obsahoval spoustu diskusních míst, her a prohlídek významných nizozemských atrakcí.

Více informací najdete na oficiálních stránkách soutěže https://www.egmo.org/ a na stránkách letošního ročníku https://egmo2020.nl/. Příští ročník soutěže se bude konat v gruzínském městě Kutaisi.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh, jejichž oficiální řešení (v angličtině) najdete zde.

První soutěžní den

1. Přirozená čísla a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokažte, že aspoň jedno z čísel a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_{3030} je dělitelné 2^{2020}.

2. Najděte všechny posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nezáporných reálných čísel splňující současně následující tři podmínky:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;
(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
(iii) existuje taková permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, že

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutace posloupnosti je posloupnost téže délky se stejnými členy, které však mohou být v libovolném pořadí. Například $(2, 1, 2)$ *je permutací* $(1, 2, 2)$ *a obě jsou permutacemi posloupnosti* $(2, 2, 1)$*. Speciálně, každá posloupnost je permutací sebe sama.*

3. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EFA|$ a ve kterém osy vnitřních úhlů u vrcholů A, C a E procházejí týmž bodem.

Dokažte, že také osy vnitřních úhlů u vrcholů B, D a F procházejí společným bodem.

Zde $|\sphericalangle FAB|$ *značí velikost úhlu* FAB*. Podobně jsou značeny velikosti ostatních vnitřních úhlů šestiúhelníka.*

Druhý soutěžní den

4. Permutace celých čísel $1, 2, \ldots, m$ se nazývá *svěží*, právě když neexistuje žádné přirozené číslo $k < m$ takové, že prvních k členů permutace je $1, 2, \ldots, k$ v nějakém pořadí. Nechť f_m je počet svěžích permutací celých čísel $1, 2, \ldots, m$.

Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí nerovnost $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Například pro $m = 4$ *je permutace* $(3, 1, 4, 2)$ *svěží, zatímco permutace* $(2, 3, 1, 4)$ *svěží není.*

5. Uvažujme trojúhelník ABC s $|\sphericalangle BCA| > 90°$. Kružnice Γ opsaná trojúhelníku ABC má poloměr R. Uvnitř úsečky AB leží takový bod P, že $|PB| = |PC|$ a délka úsečky PA je R. Osa úsečky PB protíná Γ v bodech D a E.

Dokažte, že bod P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE.

6. Buď $m > 1$ přirozené číslo. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definována takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ a pro všechna $n \geq 4$ platí

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Určete všechna přirozená čísla m, pro která jsou všechny členy posloupnosti druhými mocninami přirozených čísel.