ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA 70. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2020/2021)

Kategorie A

1. Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je
(a) pět;
(b) sedm. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$. (*Patrik Bak*)

3. Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca, abc? (*Patrik Bak*)

4. Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho *superdělitelem.*
(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.
(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2 020. (*Michal Rolínek*)

5. V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB. Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(*Patrik Bak*)

6. Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)? (*Martin Melicher*)

Kategorie B

1. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvoumístná čísla.) (*Jaroslav Zhouf*)

2. Jaká je největší možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje? (*Mária Dományová, Patrik Bak*)

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$. (*Patrik Bak*)

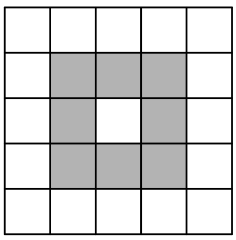
4. Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru k má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x + 6| + 2|y| &= 24, \\ |x + y| + |x - y| &= 2k \end{aligned}$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel. (*Pavel Calábek*)

5. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$. (*Marián Poturnay*)

6. Na plánu o rozměrech 12×12 čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou? (*Jozef Rajník*)



Kategorie C

1. Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a. (*Jaroslav Švrček*)

2. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0. (*Ján Mazák*)

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné. (*Jaroslav Zhouf*)

4. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a + bc}{a + b} + \frac{b + ca}{b + c} + \frac{c + ab}{c + a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. (*Michal Rolínek, Pavel Calábek*)

5. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části. (*Tomáš Jurík*)

6. Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od 1 do 100, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.

(a) Určete největší možný počet čísel na tabuli.

(b) Určete největší možný součet čísel na tabuli. (*Jaromír Šimša*)