Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je* 105*krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je*
(a) pět;
(b) sedm. (Tomáš Jurík, Jaromír Šimša)

Řešení. (a) Pro prvočísla p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 napsaná na tabuli podle zadání platí

$$p_1p_2p_3p_4p_5 = 105(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5). \tag{1}$$

Protože číslo na pravé straně (1) je násobkem čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, některá tři z pěti prvočísel na levé straně (1) se rovnají 3, 5 a 7. Bez újmy na všeobecnosti tak můžeme předpokládat, že platí $p_3 = 3$, $p_4 = 5$ a $p_5 = 7$. Rovnost (1) se pak po dosazení a vydělení obou stran číslem 105 zjednoduší na

$$p_1p_2 = p_1 + p_2 + 15.$$

Takovou rovnici s neznámými celými čísly p_1, p_2 standardní úpravou převedeme na součinový tvar

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 16. \tag{2}$$

V naší úloze jsou p_1, p_2 prvočísla, takže oba činitelé $p_1 - 1$ a $p_2 - 1$ jsou přirozená čísla. Jistě lze označení volit tak, aby platilo $p_1 \geqq p_2$, a tedy i $p_1 - 1 \geqq p_2 - 1$.

Číslo 16 z pravé strany (2) lze rozložit na součin dvou přirozených čísel $a = p_1 - 1$, $b = p_2 - 1$ splňujících podmínku $a \geqq b$ právě těmito způsoby: $16 \cdot 1$, $8 \cdot 2$ a $4 \cdot 4$. Těmto rozkladům postupně odpovídají dvojice (p_1, p_2) rovné $(17, 2)$, $(9, 3)$, $(5, 5)$. Pouze prostředních z nich není dvojicí prvočísel. Doplněním obou krajních dvojic o trojici $(3, 5, 7)$ z úvodní části řešení dostaneme jediná dvě řešení části a) úlohy, která nyní zapíšeme pro přehlednost jako pětice prvočísel v neklesajícím pořadí: $2, 3, 5, 7, 17$ a $3, 5, 5, 5, 7$.

(b) V tomto případě má pro prvočísla p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 napsaná na tabuli platit rovnost

$$p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 = 105(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7).$$

Obdobně jako v části (a) usoudíme, že bez újmy na obecnosti jsou p_5, p_6 a p_7 prvočísla 3, 5 a 7 a že nám tak zbývá řešit rovnici

$$p_1p_2p_3p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 15. \tag{3}$$

Jistě můžeme předpokládat, že p_1 je největší (případně jedno z největších) mezi čísly p_1, p_2, p_3, p_4. Protože jde o prvočísla, je každé z nich je aspoň 2. Tím pádem můžeme odhadnout levou i pravou stranu rovnice (3) následovně:

$$p_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \leqq p_1p_2p_3p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 15 \leqq 4p_1 + 15.$$

Pro upravené krajní výrazy tak máme nerovnost $8p_1 \leqq 4p_1 + 15$, odkud $p_1 \leqq 3{,}75$, tudíž pro prvočíslo p_1 platí $p_1 \in \{2, 3\}$. Protože jsme za p_1 vybrali největší z prvočísel p_1, p_2, p_3, p_4, je každé z nich rovno 2 nebo 3.

Předchozím odstavcem jsme celý postup řešení rovnice (3) v oboru prvočísel zredukovali na pouhou prověrku, které ze čtveřic tvořených výlučně čísly 2 a 3 dotyčné rovnici vyhovují. Jedná se o právě pět různých (neuspořádaných) čtveřic $(2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 3, 3)$, $(2, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3)$. Dosazením se snadno přesvědčíme, že vyhovuje jedině čtveřice $(2, 2, 2, 3)$. Doplněním o úvodní trojici $(3, 5, 7)$ dostaneme (jediné) řešení části (b) úlohy, kterou je sedmice prvočísel $2, 2, 2, 3, 3, 5, 7$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel. [Řešení neexistuje. Součin vyhovujících tří prvočísel je násobek čísla $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, takže tato prvočísla musí být 3, 5 a 7. Přitom však $3 \cdot 5 \cdot 7 \neq 105 \cdot (3 + 5 + 7)$.]

N2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel. [Řešení neexistuje. Podobně jako v N1 tři z prvočísel musí být 3, 5, 7 a pro čtvrté prvočíslo p má platit rovnice $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p = 105 \cdot (3 + 5 + 4 + p)$, kterou zjevně žádné prvočíslo p nesplňuje.]

N3. Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu. [Úloha má jediné řešení, trojici 3, 5, 7. Podobně jako v N1 ukažte, že jedno z prvočísel je 7. Pro zbývající dvě, označme je p a q, má platit $7pq = 7(p + q + 7)$, což upravíme postupně na $pq = p + q + 7$, dále na $p(q - 1) = (q - 1) + 8$ a konečně na $(p - 1)(q - 1) = 8$. Při označení takovém, že $p \geqq q$ neboli $p - 1 \geqq q - 1$, máme možnosti $(p - 1, q - 1) = (8, 1)$ nebo $(p - 1, q - 1) = (4, 2)$. Jen druhá vede k dvojici prvočísel.]

N4. Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$. [Čtyři řešení (x, y): $(-4, 1)$, $(2, -11)$, $(3, 8)$, $(15, 2)$. Po vynásobení třemi dostaneme rovnici $9xy = 15x + 21y + 3$. Teď už ji můžeme upravit na součinový tvar $(3x - a)(3y - b) = 3a + 3b$ s vhodnými celými čísly a a b, totiž $(3x - 7)(3y - 5) = 38$. Zbývá rozebrat všechny možnosti rozkladu čísla 38 na součin dvou celých čísel.]

N5. Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$. [Až na pořadí tři řešení: $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$. Je-li nějaké z čísel x, y, z rovno 1, například x, dostaneme rovnici $yz = y + z + 3$ s řešeními $(2, 5)$ a $(3, 3)$ (podle postupu z N4). Je-li naopak $\min(x, y, z) \geqq 2$ a například $z = \max(x, y, z)$, platí $x+y+z+2 \leqq 3z+2$ a současně $xyz \geqq 4z$. Odtud plyne $4z \leqq 3z + 2$ neboli $z \leqq 2$, takže je tedy nutně $x = y = z = 2$, a to je skutečně řešení.]

D1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ šesti prvočísel. [Řešení neexistuje. Podobně jako v N1 usoudíme, že z šesti prvočísel tři jsou 3, 5 a 7, ostatní, které označíme x, y a z, splňují rovnici $xyz = x + y + z + 15$. Je-li některé z prvočísel x, y, z rovno 2, postupem z řešení N4 zjistíme, že rovnice nemá prvočíselné řešení. V opačném případě, kdy $\min(x, y, z) \geqq 3$ a například $z = \max(x, y, z)$, máme $9z \leqq xyz = x + y + z + 15 \leqq 3z + 15$ neboli $z \leqq 2{,}5$, a to je spor.]

D2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ $n \geqq 8$ prvočísel. [Řešení neexistuje pro žádné $n \geqq 8$. Podobně jako v N1 jsou tři prvočísla 3, 5 a 7, zbývající označme $p_1, \ldots, p_k$, kde $k = n-3$, tedy $k \geqq 5$. Platí $p_1 \cdots p_k = p_1 + \cdots + p_k + 15$. Je-li například $p_1 = \max(p_1, \ldots, p_k)$, pak $2^{k-1}p_1 \leqq p_1 \cdots p_k = p_1 + \ldots + p_k + 15 \leqq k \cdot p_1 + 15$, tedy $p_1(2^{k-1} - k) \leqq 15$. Indukcí se však snadno ukáže, že pro každé $k \geqq 5$ platí $2^{k-1} - k \geqq 11$, odkud $p_1(2^{k-1} - k) \geqq 2 \cdot 11 = 22$, což odporuje dříve odvozené nerovnosti.]

D3. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$. [Jediné řešení $x = y = z = 3$. Nechť nejprve některé z prvočísel x, y a z je rovno 2, např. z. Pak platí $x^2 + y^2 = x + y + 16$. Snadno ověříme, že nemůže být ani $x = 2$, a tedy ani $y = 2$, a proto $\min(x, y) \geqq 3$. Tehdy $3x + 3y \leqq x^2 + y^2 = x + y + 16$, takže takže $x + y \leqq 8$, tudíž stačí otestovat dvojice (x, y) rovné $(3, 3)$ a $(5, 3)$, které však nevedou k řešení. Přejdeme k druhému případu, kdy $\min(x, y, z) \geqq 3$. Tehdy $3x+3y+3z \leqq x^2+y^2+z^2 = x+y+z+18$, takže $x + y + z \leqq 9$, tedy nutně $x = y = z = 3$, což je skutečně řešení úlohy.]

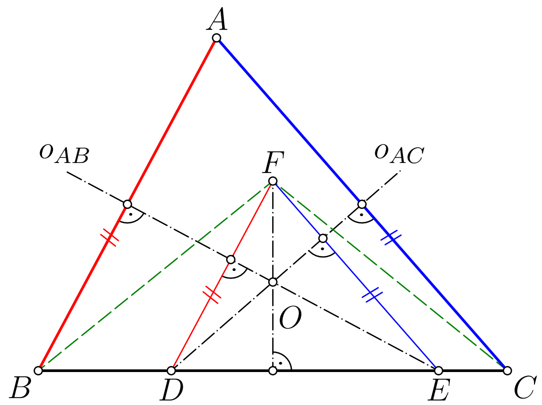
D4. Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$. [Jediné řešení $x = y = z = 5$. Jestliže je nějaké z prvočísel rovno 2 nebo 3, tak dosazením dostaneme rovnice podobné jako v N4, o kterých se stejným postupem přesvědčíme, že nemají žádná prvočíselná řešení. Předpokládejme proto dále, že $x \geqq y \geqq z \geqq 5$. Potom

$$5xy \leqq xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35 \leqq 3xy + 3x + 35,$$

odkud $x(2y - 3) \leqq 35$. Zároveň však z $x \geqq 5$ a $2y - 3 \geqq 2 \cdot 5 - 3 = 7$ plyne opačná nerovnost $x(2y - 3) \geqq 35$, takže nutně $x = y = 5$, a proto rovněž $z = 5$, tedy jediné možné řešení je $x = y = z = 5$.]

2. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Zadaná rovnost $|AD| = |CD|$ znamená, že bod D je průsečík strany BC s osou o_{AC} strany AC. Podobně díky rovnosti $|AE| = |BE|$ je bod E průsečík strany BC s osou o_{AB} strany AB. Průsečík O těchto dvou os, který označíme jako O (obr. 1), je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dodejme, že podle zadání platí $D \neq E$, a tak je bod O různý od bodů D a E. Proto můžeme dále mluvit o osách o_{AC}, o_{AB} jako o přímkách DO, resp. EO.



Obr. 1

Zaměřme se nyní na bod F. Tento je určen podmínkami rovnoběžnosti $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$ (F tak zřejmě leží uvnitř $\triangle ABC$, a tudíž existuje $\triangle DEF$). S ohledem na $AB \perp EO$ a $AC \perp DO$ dostáváme kolmosti vyznačené na obrázku: $FD \perp EO$ a $FE \perp DO$. Plyne z nich, že bod O je průsečíkem dvou výšek trojúhelníku DEF. Jeho třetí výška z vrcholu F tedy leží na téže kolmici k přímce BC jako střed O opsané kružnice. Jinak řečeno, bod F leží na ose strany BC, a proto platí rovnost $|FB| = |FC|$, kterou jsme měli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Uvědomte si, jak se dokazuje školní poznatek, že osy stran libovolného trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. [Označme O průsečík os stran AB a AC. Podle vlastnosti os úseček nutně platí $|OA| = |OB|$ a $|OA| = |OC|$, takže $|OB| = |OC|$, což naopak znamená, že bod O leží na ose strany BC.]

N2. Dokážete užitím poznatku o osách stran z úlohy N1 odvodit jiný školní poznatek, že také výšky libovolného trojúhelníku ABC se (jako přímky) protínají v jednom bodě? [Trojúhelník ABC doplňte třikrát na rovnoběžník $ABA'C$, $BCB'A$, resp. $CAC'B$. Pak body A, B, C jsou středy stran trojúhelníku $A'B'C'$. Osy jeho stran se protínají v jednom bodě (podle úlohy N1) a leží na nich výšky původního trojúhelníku ABC.]

N3. Uvědomte si následující ekvivalentní formulaci tvrzení o existenci průsečíku výšek libovolného trojúhelníku ABC: Jestliže pro nějaký bod H roviny trojúhelníku ABC platí $HB \perp AC$ a $HC \perp AB$, pak buď $H = A$, nebo $HA \perp BC$. [Bod H je průsečíkem dvou výšek trojúhelníku ABC a každá z relací $H = A$, $HA \perp BC$ znamená, že bod H leží i na třetí výšce z vrcholu A.]

D1. Dokažte implikaci z úlohy N3 metodou obvodových úhlů, alespoň pro případ ostroúhlého trojúhelníku ABC. [Nechť tedy $HB \perp AC$, $HC \perp AB$. Označme A' průsečík AH

a BC, B' průsečík BH a AC, a C' průsečík CH a AB. Čtyřúhelníky $AC'HB'$ a $BC'B'C$ jsou tětivové díky pravým úhlům $\sphericalangle AB'H$, $\sphericalangle HC'A$, $\sphericalangle BC'C$, $\sphericalangle BB'C$. Proto $|\sphericalangle BAA'| = |\sphericalangle C'AH| = |\sphericalangle C'B'H| = |\sphericalangle C'B'B| = |\sphericalangle C'CB|$. Trojúhelníky BAA', BCC' se proto shodují ve dvou vnitřních úhlech, takže se shodují i ve třetím z nich: $|\sphericalangle AA'B| = |\sphericalangle BC'C| = 90°$. Odtud už $HA \perp BC$.]

D2. V trojúhelníku ABC platí $|AB| \neq |AC|$. Nechť S je takový bod osy úhlu BAC, pro který platí $|SB| = |SC|$. Dokažte, že bod S leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Pracovat přímo se zadaným bodem S je obtížné, a tak uvážíme pomocný bod S', kterým je průsečík $S' \neq A$ osy úhlu BAC s kružnicí opsanou. Jak je dobře známo, platí $|S'B| = |S'C|$ (plyne to ze shodnosti obvodových úhlů $S'AB$ a $S'AC$). Díky podmínce $|AB| \neq |AC|$ je společný bod S osy úhlu BAC a osy strany BC jediný, a tak platí $S' = S$.]

D3. V trojúhelníku ABC se středem I kružnice vepsané platí $|AB| < |AC|$. Nechť D je bod strany AC takový, že $|AB| = |AD|$. Dokažte, že body B, C, D, I leží na jedné kružnici. [Polopřímka AI je osa úhlu BAC, a tedy i osa úhlu BAD, která je díky podmínce $|AB| = |AD|$ zároveň i osou úsečky BD. Bod I je tedy pro trojúhelník BCD takovým bodem osy úhlu BCD, pro který platí $|IB| = |ID|$. Protože navíc $|CB| \neq |CD|$ (neboť $|CD| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| < |CB|$ podle trojúhelníkové nerovnosti), je možné užít výsledek úlohy D2, podle kterého leží bod I kružnici opsané trojúhelníku BCD. *Jiné řešení*: Stačí ukázat, že oba úhly BIC a BDC mají velikost $90° + \frac{1}{2}\alpha$, kde jako obvykle $\alpha = |\sphericalangle BAC|$.]

3. *Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?* (Patrik Bak)

Řešení. Protože a, b, c jsou navzájem různá kladná čísla, jsou taková i čísla ab, bc, ca, neboť například z $ab = bc$ plyne $a = c$ (díky $b \neq 0$). Vidíme tak, že ve zkoumané sedmici čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc jsou aspoň 3 různé hodnoty. Dokážeme nejdříve sporem, že právě 3 hodnoty to nikdy být nemohou. Poté uvedeme příklad zkoumané sedmice, která je složena pouze ze 4 různých hodnot.

Nejprve tedy připusťme, že v některé sedmici jsou právě 3 různé hodnoty. Víme, že jsou to hodnoty tří součinů ab, bc, ca, a tak součin abc se musí rovnat jednomu z nich. Znamená to, že jedno z čísel a, b, c je rovno 1, neboť například z $abc = ab$ plyne $c = 1$.

Bez újmy na obecnosti se dále omezíme na případ $c = 1$. Dotyčnou sedmici se třemi různými hodnotami pak můžeme zredukovat na šestici téže vlastnosti, která je složena z čísel

$$a+b,\ a+1,\ b+1,\ ab,\ a,\ b$$

(dosadili jsme $c = 1$ a vynechali číslo abc rovné ab). Protože už jsou vyloučeny rovnosti $a = 1$ a $b = 1$, tři různé hodnoty jsou zastoupeny jak v první trojici $a+b$, $a+1$, $b+1$, tak i ve druhé trojici ab, a, b. Obě čísla a, b z druhé trojice proto musí ležet v množině $\{a+b, a+1, b+1\}$. Toho lze dosáhnout jedině tak, že platí $a = b+1$ a současně $b = a+1$, a to je nemožné. Důkaz sporem je hotov.

Jak jsme slíbili, v druhé části řešení uvedeme příklad zkoumané sedmice, která je složena ze 4 různých hodnot. Podle předchozích pozorování se vyplatí prozkoumat situaci, kdy platí řekněme $c = 1$ a zároveň $b = a+1$. Tehdy máme

$$(a+b, b+c, c+a) = (2a+1, a+2, a+1) \quad \text{a} \quad (ab, bc, ca, abc) = \bigl(a^2+a, a+1, a, a^2+a\bigr).$$

Stačí tedy najít takové kladné číslo $a \neq 1$, aby v pětici čísel

$$a,\ a+1,\ a+2,\ 2a+1,\ a^2+a$$

byly jen čtyři různé hodnoty. S ohledem na zřejmé nerovnosti, které pro uvažovaná a mezi těmito pěti čísly panují, se ke splnění požadavku nabízejí právě dvě možnosti. Jsou vyjádřeny rovnicemi

$$a^2+a = 2a+1, \quad \text{resp.} \quad a^2+a = a+2.$$

Obě skutečně vedou k vyhovujícím trojicím, jež jsou tvaru

$$(a,b,c) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right), \quad \text{resp.} \quad (a,b,c) = \bigl(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1\bigr).$$

Závěr. Nejmenší možný počet různých čísel ve zkoumané sedmici je roven 4.

Poznámka. Pokud nebudeme rozlišovat trojice (a,b,c), které se liší pouze pořadím svých prvků, existují další dvě přípustné trojice, pro něž se ve zkoumané sedmici najdou pouze 4 různé hodnoty. První z nich je trojice

$$(a,b,c) = \left(a, \frac{a}{a-1}, \frac{a}{(a-1)^2}\right),$$

kde $a > 0$ je jediný reálný kořen kubické rovnice $a^3 - 4a^2 + 4a - 2 = 0$. Druhou vyhovující trojicí je

$$(a, b, c) = \left(a, \frac{a}{a^2 - a - 1}, \frac{a(a-1)}{a^2 - a - 1}\right),$$

kde a je větší ze dvou kladných kořenů rovnice $a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 2a + 2 = 0$.*

JINÉ ŘEŠENÍ. Ještě jedním způsobem dokážeme, že ve zkoumané sedmici čísel $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca, abc musí být aspoň 4 různé hodnoty. Využijeme přitom obecně užitečný obrat: s ohledem na symetrické zastoupení čísel a, b, c je můžeme předem uspořádat podle velikosti.

Budeme tedy předpokládat, že pro (kladná) čísla a, b, c platí $a < b < c$ (podle zadání jsou různá). Potom zřejmě rovněž platí

$$a + b < a + c < b + c \quad \text{a} \quad ab < ac < bc. \tag{1}$$

Vidíme, že mezi dohromady šesti čísly zapsanými v (1) se najdou aspoň 4 různé hodnoty, nenastane-li případ, kdy uspořádané trojice $(a + b, a + c, b + c)$ a (ab, ac, bc) splynou, tj. bude splněna soustava rovnic

$$\begin{aligned} a + b &= ab, \\ a + c &= ac, \\ b + c &= bc. \end{aligned}$$

Ukažme, že to není možné. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme po snadné úpravě $(b - c)(1 - a) = 0$. To s ohledem na $b \neq c$ znamená $a = 1$. Po dosazení do první rovnice ovšem obdržíme rovnici $1 + b = b$, která nemá řešení.

Tím je úvodem slíbený důkaz hotov. Za povšimnutí stojí, že jsme v něm vůbec nepotřebovali poslední číslo abc ze sedmice $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc. Ukázali jsme totiž, že aspoň 4 různé hodnoty se vždy najdou již mezi jejími prvními šesti čísly.

Dodejme, že právě popsaný postup lze využít i při hledání (všech) sedmic složených ze 4 různých hodnot. Plyne z něho totiž, že takovou sedmici dostaneme, právě když tříprvkové množiny $\{a+b, a+c, b+c\}$ a $\{ab, ac, bc\}$ se budou shodovat *ve dvou hodnotách* a když pak hodnota abc bude rovna *jedné ze čtyř hodnot* z obou množin.** Tak například dvě uspořádané trojice (a, b, c) nalezené v závěru prvního řešení jsou po řadě řešeními soustav rovnic

$$\begin{aligned} a + b &= ab, \\ a + c &= bc, \\ abc &= ab, \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} b + c &= ab, \\ a + c &= bc, \\ abc &= ab. \end{aligned}$$

Podobně uspořádané trojice (a, b, c) uvedené v poznámce za prvním řešením jsou po řadě řešeními soustav rovnic

$$\begin{aligned} a + b &= ab, \\ b + c &= ac, \\ abc &= a + c, \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} a + b &= ac, \\ b + c &= ab, \\ abc &= a + c. \end{aligned}$$

* První trojice je přibližně $(2{,}8393; 1{,}5437; 0{,}8393)$, druhá $(2{,}3322; 1{,}1069; 1{,}4746)$.

** Všimněte si, že tyto podmínky jsou v proměnných a, b, c symetrické.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Ve všech úlohách budou a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla.

N1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b$, $b + c$, $c + a$, $a + b + c$. [Jde vždy o čtyři různá čísla. Jistě lze předpokládat, že $0 < a < b < c$. Pak ovšem $a + b < a + c < b + c < a + b + c$.]

N2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc. [Tři. Jistě lze předpokládat, že $0 < a < b < c$. Pak ovšem $ab < ac < bc$, takže aspoň tři různé hodnoty existují vždy. Právě tři různé hodnoty to budou, právě když číslo abc bude rovno jednomu z čísel ab, ac, bc, tj. právě když bude $1 \in \{a, b, c\}$.]

N3. Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1? [Tři a možný počet to je i v případě $a \neq 1 \neq b$. S ohledem na symetrii zadání v proměnných a a b můžeme předpokládat, že $a < b$. Protože $b < b + 1$, jsou a, b, $b + 1$ tři různé hodnoty. Aby byly právě tři v celé pětici, musí platit $a + 1 = b$ a v případě $a \neq 1 \neq b$ ještě musí být $ab = b + 1$. Oběma rovnostem vyhovují čísla $a = \sqrt{2}$ a $b = \sqrt{2} + 1$, která jsou různá od 1 a pro která jsou v pětici skutečně tři různé hodnoty.]

N4. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a + b$, $a + c$. [Tři. Protože $ab \neq ac$ a také $a+b \neq a+c$, tak máme aspoň 2 různé hodnoty. Připusťme, že máme právě 2 různé hodnoty v celé čtveřici. Pak máme dvě možnosti: buď $ab = a + b$ a $ac = a + c$, nebo $ab = a + c$ a $ac = a + b$. V prvním případě po odečtení obou rovností dostaneme $(a - 1)(b - c) = 0$, odkud $a = 1$, a to je spor s $ab = a + b$. V druhém případě po podobném odečtením dostaneme $(a + 1)(b - c) = 0$, a to rovněž spor. Proto vždy máme aspoň 3 různé hodnoty, a tento počet nepřekročíme, bude-li platit $ab = a + b$, což splňuje například trojice $(a, b, c) = (3, \frac{3}{2}, 1)$. Dodejme, že postup jsme mohli zjednodušit využitím symetrie zadání v proměnných b a c, díky které můžeme předpokládat, že $b < c$. Tehdy platí $ab < ac$ a $a + b < a + c$, takže stačí rozebrat jen první ze dvou výše rozlišených případů.]

D1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$. [Dvě. Úloha se nezmění, když trojici (a, b, c) zaměníme libovolnou z trojic (b, c, a) a (c, a, b). Proto můžeme předpokládat, že platí $a = \max\{a, b, c\}$. Pak $2a > b + c$ neboli $c + 2a > b + 2c$. Tím pádem v naší trojici máme aspoň dvě různé hodnoty. Pro nalezení trojice s právě dvěma různými hodnotami položme například $c + 2a = a + 2b$. To dává $a = 2b - c$. Tak například pro $c = 1$, $b = 2$ vyjde $a = 3$. Tehdy $(a + 2b, b + 2c, c + 2a) = (7, 4, 7)$.]

D2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$, abc. [Čtyři. Díky symetrii můžeme předpokládat, že $a > b > c$. Potom $a+b > a+c > b+c$ a $ab + 1 > ac + 1 > bc + 1$, takže v zadané sedmici jsou vždy aspoň tři různé hodnoty. Kdyby byly právě tři, tak by nutně platilo $a + b = ab + 1$, $a + c = ac + 1$ a $b + c = bc + 1$. To upravíme na $(a - 1)(b - 1) = 0$, $(a - 1)(c - 1) = 0$ a $(b - 1)(c - 1) = 0$. Nutně se tedy dvě z čísel a, b, c rovnají 1, a to je spor. V naší sedmici tedy máme vždy aspoň 4 různé hodnoty, a tento počet nepřekročíme, když například zvolíme $a = 1$ a budeme požadovat, aby platilo $bc = b + c$, což kupříkladu splňuje dvojice $(b, c) = \big(3, \frac{3}{2}\big)$.]

D3. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}, \quad \frac{a + b + c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

[Čtyři. Jednotlivá čísla jsou různé druhy průměrů sestavené pro tutéž trojici čísel a, b, c. Označme zleva doprava jejich hodnoty K, A, G, H podle jejich názvů *kvadratický*, resp. *aritmetický*, resp. *geometrický*, resp. *harmonický* průměr. Jak je známo, mezi těmito průměry pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí nerovnosti $K \geqq A \geqq G \geqq H$, pričemž všechny nerovnosti jsou ostré s výjimkou případu, kdy platí $a = b = c$. (Důkazy těchto nerovností lze nalézt v brožuře *A. Kufner: Nerovnosti a odhady*, dostupné na `https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877`.)]

4. *Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho superdělitelem.*

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2 020.

(Michal Rolínek)

ŘEŠENÍ. Nejprve se s novým pojmem *superdělitel* blíže seznámíme. O číslech a jejich dělitelích budeme v celém řešení předpokládat, že to jsou celá kladná, tj. přirozená čísla.

Mějme dáno číslo $n > 1$. Číslo a je jeho dělitel, právě když platí $n = ab$ pro vhodné číslo b, které pak je tudíž rovněž dělitelem čísla n (může platit i $a = b$). Jistě pro taková čísla a, b (sdružená podmínkou $n = ab$) platí: čím větší je a, tím menší je b. Protože speciálně pro $a = n$ je $b = 1$, největšímu děliteli a s vlastností $a < n$, tj. superděliteli d čísla n, bude odpovídat nejmenší dělitel b s vlastností $b > 1$ – a tím je jistě *nejmenší prvočinitel** p daného čísla n. S jeho superdělitelem d je tedy toto prvočíslo p svázáno rovností $pd = n$. K určení superdělitele daného čísla tak stačí najít jeho nejmenší prvočinitel a tím pak dané číslo vydělit. Například superdělitelem každého sudého čísla $2k$ je číslo $2k : 2 = k$.

Nyní už jsme připraveni posoudit otázku, jak vypadají všechna čísla n, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Podle předchozího výkladu to budou právě ta n, která jsou tvaru $n = pd$, kde prvočíslo p je voleno tak, aby bylo nejmenším prvočinitelem vzniklého čísla n, tedy čísla pd. Co podmínka „p je nejmenším prvočinitelem čísla pd“ znamená? Zřejmě právě to, že prvočíslo p nepřevyšuje žádného z prvočinitelů daného čísla d. Díky předpokladu $d > 1$ není množina prvočinitelů čísla d prázdná, a tak odvozenou podmínku splňuje jen několik prvních nejmenších prvočísel p (všechna až po největší prvočinitel daného d včetně).** Tím je část (i) úlohy vyřešena.

Podle předchozího odstavce pro součet $s(d)$ všech čísel s daným superdělitelem d platí vzorec

$$s(d) = 2d + 3d + \cdots + p_l d = (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)d,$$

kde $2 = p_1 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \ldots < p_l$ je skupina prvních l prvočísel končící nejmenším prvočinitelem p_l daného čísla $d > 1$. Úkolem části (ii) úlohy je proto rozhodnout, zda existuje nějaké liché číslo $d > 1$, pro něž platí relace

$$2\,020 \mid (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)d. \tag{1}$$

Existenci takového čísla d potvrdíme příkladem, který najdeme, když budeme postupně odvozovat, jaké vlastnosti musí každé vyhovující číslo d obecně mít.***

Protože liché číslo d je nesoudělné s číslem 4, které je dělitelem čísla 2 020, plyne z (1) relace

$$4 \mid p_1 + p_2 + \cdots + p_l.$$

* Připomeňme, že termín *prvočinitel* znamená *prvočíselný dělitel.*

** V případě $d = 1$ vyhovuje každé prvočíslo p, a proto platí: Superdělitele 1 mají právě ta čísla, která jsou prvočísla. Těch je nekonečně mnoho, a tak bez podmínky $d > 1$ tvrzení (i) neplatí.

*** Bez podmínky, že číslo $d > 1$ je liché, by takový úkol byl triviální: pro sudé číslo $d = 1\,010$ je $p_l = 2$, a tak platí $s(d) = 2d = 2\,020$.

Odtud plyne $l \geqq 4$ (čísla 2, $2+3=5$ a $2+3+5=10$ totiž nejsou číslem 4 dělitelná). Pro nejmenší prvočinitel p_l čísla d tak platí $p_l \geqq p_4 = 7$, a proto $5 \nmid d$. Liché číslo d je tudíž nesoudělné s dělitelem 20 čísla 2 020. Proto z (1) plyne relace

$$20 \mid p_1 + p_2 + \cdots + p_l. \tag{2}$$

Nebudeme zde vypisovat postupné dosazování hodnot $l = 3, 4, \ldots$, které vede ke zjištění, že nejmenší číslo l splňující relaci (2) je $l = 9$:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_9 = 2+3+5+7+11+13+17+19+23 = 100. \tag{3}$$

Pokusme se už nyní najít vyhovující číslo d mezi čísly s nejmenším prvočinitelem $p_9 = 23$. Po dosazení součtu (3) do (1) zjistíme, že taková čísla d mají splňovat podmínku

$$2\,020 \mid 100d \quad \text{neboli (po krácení číslem 20)} \quad 101 \mid 5d.$$

Protože 101 je prvočíslo, poslední relace bude platit, právě když číslo d bude mít kromě (nejmenšího) prvočinitele 23 rovněž prvočinitele 101. Za vyhovující číslo d proto můžeme zvolit $d = 23 \cdot 101 = 2\,323$. Tím je řešení části (ii) úlohy hotovo.

Poznámka. Užitím počítače lze zjistit, že podmínku $2\,020 \mid s(d)$ splňují i některá (velká) prvočísla d. Okomentujme výsledek, že nejmenší z nich je $d = 10\,663$. Z našeho řešení plyne, že pro každé prvočíslo d platí vzorec

$$s(d) = (2+3+5+\ldots+d) \cdot d,$$

ve kterém se sčítají všechna prvočísla od 2 do d včetně. Pro $d = 10\,663$ je tento součet roven $6\,480\,160 = 3\,208 \cdot 2\,020$, a tak je hodnota $s(10\,663)$ skutečně dělitelná číslem 2 020.

Dodejme ještě, že relaci $2\,020 \mid s(d)$ nesplňuje „nadějné“ prvočíslo $d = 101$, neboť součet všech prvočísel od 2 do 101 je roven číslu 1 161, které není dělitelné číslem 20, jak bychom podle součinu ze vzorce pro $s(d)$ potřebovali.

Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že prvočinitelem čísla n nazýváme každé prvočíslo, které číslo n dělí.

N1. Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n. [Je-li d dělitel čísla n, je jeho dělitelem i číslo $\frac{n}{d}$. Nejmenší dva dělitelé n jsou 1 a p, kterým odpovídají dva jeho největší dělitelé $\frac{n}{1}$ a $\frac{n}{p}$.]

N2. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2. [Jedině číslo 4. Každé hledané číslo n je nutně sudé, a tak je číslo 2 jeho nejmenší prvočinitel. Podle výsledku N1 tedy platí $2 = \frac{n}{2}$, a proto $n = 4$.]

N3. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7. [14, 21, 35 a 49. Každé hledané n je dělitelné sedmi a podle výsledku N1 má platit $7 = \frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel n, takže $p \leqq 7$ neboli $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.]

D1. Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2 020. [1 515 a 1 919. Je-li p nejmenší prvočinitel čísla n, pak $n = dp$, kde d je superdělitel n. Má platit $dp + d = 2020$ neboli $d(p+1) = 2020$, takže zbývá probrat všechny dělitele d čísla 2 020 s prvočíselným rozkladem $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pro $d = 1$ vychází $p = 2019$, což není prvočíslo. Kdyby bylo $d > 1$ sudé, bylo by sudé i číslo n, a tak by bylo $p = 2$, a tedy $d(2+1) = 2020$, což není možné. Zbývají proto možnosti $d \in \{5, 101, 505\}$. Postupným dosazením do $d(p+1) = 2020$ zjistíme, že řešení dává pouze hodnota $d = 101$, které odpovídá $p = 19$, a hodnota $d = 505$, pro kterou vychází $p = 3$. (V obou případech je skutečně nalezené p nejmenším prvočinitelem součinu $n = dp$.)]

D2. Které z čísel $2, 3, \ldots, 20$ je superdělitelem největšího počtu čísel? [Číslo 19. Hledáme to číslo $n \in \{2, 3, \ldots, 20\}$, pro které existuje co nejvíce prvočísel p takových, že nejmenší prvočinitel čísla np je právě p. Protože $n > 1$, musí pro každé prvočíslo p s uvedenou vlastností platit $p \leqq n$, a tedy i $p \leqq 20$, takže takových prvočísel nemůže být více, než je všech prvočísel do 20, kterých je 8. Aby jich bylo právě 8, musel by i součin $19n$ mít nejmenšího prvočinitele 19, což z uvažovaných čísel n splňuje jedině $n = 19$. Toto číslo je skutečně superdělitelem osmi čísel $19 \cdot 2$, $19 \cdot 3$, $19 \cdot 5$,..., $19 \cdot 19$.]

D3. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 2 017. Číslo 1 je superdělitelem každého prvočísla. Nejbližší prvočíslo k číslu 2 020 je 2017. Výpočtem superdělitelů čísel $2\,018, 2\,019, \ldots, 2\,023$ zjistíme, že žádný z nich nepatří mezi čísla ze zadání.]

D4. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2 020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$? [Číslo 1 849. Největším číslem n s daným superdělitelem $d > 1$ je číslo $n = dp$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla d. Odtud plyne, že pokud $1 < d \leqq 43$, pro každé číslo n se superdělitelem d platí $n \leqq d^2 \leqq 43^2 = 1\,849$, přitom číslo 1 849 má za superdělitele prvočíslo 43. Dále největší číslo se superdělitelem 44 je rovno $44 \cdot 2 = 88$, největší číslo se superdělitelem 45 je rovno $45 \cdot 3 = 135$.]

5. *V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB. Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí*

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \leqq 2.$$

(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Náš postup založíme na využití tzv. Apolloniových kružnic. Uveďme proto o nich nejprve základní poučení. Důkazy uvedených poznatků i některá využití těchto kružnic jsou vyloženy v části I kapitoly 5 brožury *S. Horák: Kružnice*, dostupné na https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589.

Mějme dáno kladné reálné číslo $\lambda \neq 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Pak platí, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují rovnici

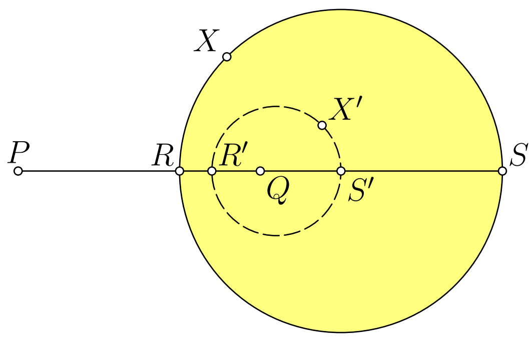
$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je jistá kružnice. Říkáme jí Apolloniova a my teď rovněž popíšeme její konstrukci. Omezíme se přitom na případ $\lambda > 1$, neboť v případě $\lambda < 1$ lze prohozením bodů P a Q změnit parametr λ rovnice (1) na hodnotu $1/\lambda > 1$.

Konstrukci Apolloniovy kružnice (1) zahájíme tak, že nejprve určíme její průsečíky s přímkou PQ. Budou jimi jeden vnitřní bod R úsečky PQ a jeden vnitřní bod S polopřímky opačné k polopřímce QP.* Zopakujme, že takto lokalizované body R a Q jsou jednoznačně určeny rovnostmi

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|PS|}{|QS|} = \lambda$$

(viz obr. 1 pro hodnotu $\lambda = 2$).



Obr. 1

Pak platí, že Apolloniovou kružnicí (1) je kružnice nad průměrem RS.

S ohledem na soutěžní úlohu, kterou teprve začneme řešit, je na obr. 1 je vybarven kruh, který Apolloniova kružnice (1) ohraničuje. Ukažme, že uvnitř tohoto kruhu za našeho předpokladu $\lambda > 1$ leží každý bod $X' \in \varrho$, pro který platí

$$\frac{|PX'|}{|QX'|} > \lambda. \tag{2}$$

* Taková poloha bodu S odpovídá našemu předpokladu $\lambda > 1$.

Skutečně, každý takový bod X' bude splňovat rovnici tvaru (1), ve které hodnotu λ zaměníme za větší hodnotu λ' rovnou zlomku $|PX'|/|QX'|$. Bod X' pak leží na nové Apolloniově kružnici pro určený parametr λ', která je vykreslena na obr. 1. Je to kružnice nad průměrem $R'S'$, přitom díky nerovnosti $\lambda' > \lambda$ se snadno vysvětlí, že body R' a S' leží po řadě uvnitř úseček RQ a QS. Proto nová kružnice pro parametr λ' leží uvnitř kruhu ohraničeného původní kružnicí pro parametr λ. Tím je slíbený důkaz hotov.*

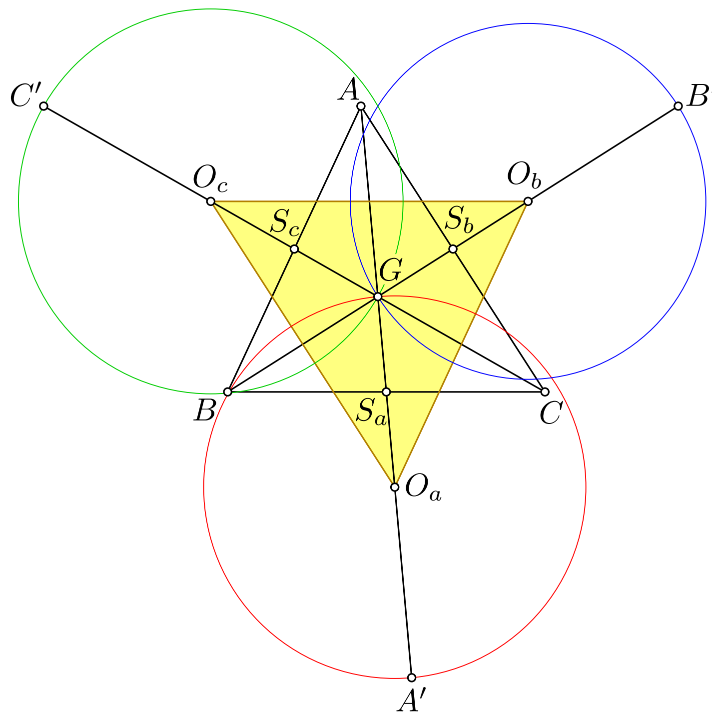
Pro provedené přípravě už můžeme přejít k vlastní soutěžní úloze a podat její vcelku krátké řešení. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Budeme tedy předpokládat, že zadaná nerovnost neplatí. Pak pro některý bod X jsou všechny tři podíly

$$\frac{|XA|}{|XS_a|}, \quad \frac{|XB|}{|XS_b|}, \quad \frac{|XC|}{|XS_c|}$$

větší než 2. Podle vyložené teorie to znamená, že bod X leží uvnitř tří kruhů, které jsou ohraničeny Apolloniovými kružnicemi o rovnicích

$$\frac{|XA|}{|XS_a|} = 2, \quad \frac{|XB|}{|XS_b|} = 2, \quad \frac{|XC|}{|XS_c|} = 2.$$

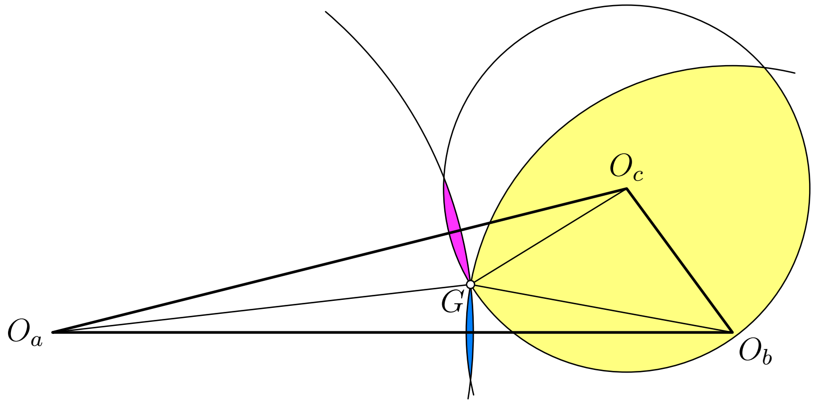
Obecná poučka o průměru Apolloniových kružnic pro naše tři kružnice s parametrem $\lambda = 2$ znamená, že jejich průměry jsou úsečky GA', GB' a GC', kde bod G je těžiště trojúhelníku ABC a body A', B', C' jsou postupně obrazy bodů A, B, C ve středových souměrnostech podle S_a, S_b, S_c. Středy těchto tří kružnice označíme po řadě O_a, O_b, O_c (viz obr. 2).



Obr. 2

* I když to nebudeme dále potřebovat, dodejme, že také naopak *každý* bod X' různý od Q, který leží uvnitř dotyčného kruhu, splňuje nerovnici (2). Skutečně, kdyby pro číslo $\lambda' = |PX'|/|QX'|$ platilo $\lambda' < \lambda$, pak díky tomu, že zřejmě platí $\lambda' > 1$, bychom mohli zopakovat úvahu z tohoto odstavce s dvojicí (λ, λ') zaměněnou za (λ', λ) a dojít tak se sporu.

Jak nám obrázek napovídá, žádný bod X nemůže ležet uvnitř všech tří kruhů, které sestrojené kružnice vymezují. Abychom tuto hypotézu dokázali (a tak náš důkaz sporem završili), uvědomíme si několik skutečností: bod G je společným bodem všech tří kružnic a leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy ve středech O_a, O_b a O_c, který je na obr. 2 vybarven. Plyne to z toho, že tento trojúhelník je zřejmě obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle jeho těžiště G, a tak oba trojúhelníky mají toto těžiště společné. Konvexní úhly O_aGO_b, O_aGO_c a O_bGO_c pokrývají celý trojúhelník $O_aO_bO_c$ a jejich sjednocení je plný úhel. Tedy aspoň dva z nich musí být tupé.*



Obr. 3

Předpokládejme, že úhly O_aGO_b, O_aGO_c jsou tupé (viz obr. 2 a 3 pro ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník, pro zbývající možnosti jsou úvahy obdobné). Potom průnik kruhů se středy O_a a O_b zřejmě leží v úhlu O_aGO_b** a průnik kruhů se středy O_a a O_c leží v úhlu O_aGO_c. Průnik všech tří kruhů tak leží v průniku obou zmíněných úhlů, tedy na polopřímce GO_a. Ovšem kruh se středem v bodě O_b protíná díky tupému úhlu O_aGO_b polopřímku GO_a pouze v bodě G. Tedy průnik všech tří kruhů obsahuje jediný bod, a to bod G. Tím je naše hypotéza dokázána a řešení je tak dokončeno.

Jiné řešení. Vyložíme postup, který nevyužívá Apolloniových kružnic. Místo nich budeme potřebovat pomocné tvrzení, které nyní zformulujeme a vzápětí dokážeme: *Nechť G je těžiště trojúhelníku ABC a nechť X je libovolný bod poloroviny p_a, která obsahuje úsečku GA a jejíž hraniční přímka k_a je kolmice k této úsečce vedená bodem G. Potom platí nerovnost*

$$\frac{|XA|}{|XS_a|} \leqq 2. \tag{3}$$

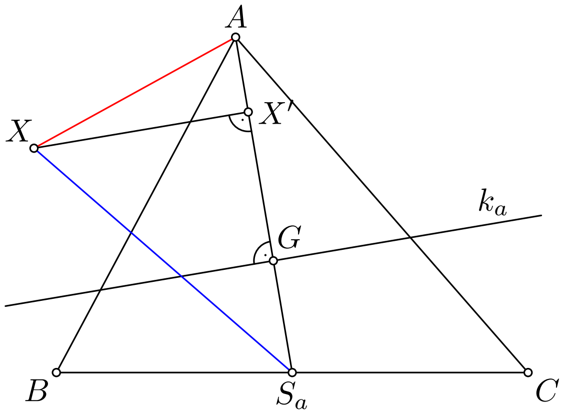
K důkazu tohoto tvrzení využijeme X' kolmý průmět bodu X na polopřímku GA (obr. 4).

Pokud bod X' leží na úsečce AG, splňuje nerovnost

$$\frac{|X'A|}{|X'S_a|} \leq \frac{|GA|}{|GS_a|} = 2. \tag{4}$$

* Kdyby dva úhly byly ostré, případně jeden z nich pravý (oba pravé být nemohou, protože G je těžiště, tedy vnitřní bod trojúhelníku $O_aO_bO_c$), zbývající úhel by nebyl konvexní.

** V tomto tupém úhlu totiž leží průnik dvou polorovin, které jsou vymezeny tečnami k hraničním kružnicím ve společném bodě G a ve kterých dané dva kruhy po jednom leží.



Obr. 4

V opačném případě je X' je vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce AG. Pak ovšem platí $|X'A| < |X'S_a|$, a tak je levá strana nerovnosti (4) dokonce menší než 1. Nerovnost (4) proto platí v obou případech.

Užitím Pythagorovy věty a nerovnosti (4) upravené do tvaru $|X'A|^2 \leqq 4|X'S_a|^2$ obdržíme

$$\frac{|XA|^2}{|XS_a|^2} = \frac{|XX'|^2 + |X'A|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} \leqq \frac{|XX'|^2 + 4|X'S_a|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} \leqq \frac{4|XX'|^2 + 4|X'S_a|^2}{|XX'|^2 + |X'S_a|^2} = 4.$$

Po odmocnění krajních výrazů už dostaneme nerovnost (3).

Porovnáme-li nerovnost (3) z právě dokázaného tvrzení s nerovností ze zadání soutěžní úlohy, vidíme, že pro její nové řešení stačí dokázat, že každý bod roviny trojúhelníku ABC leží v aspoň jedné z polorovin p_a, p_b, p_c, kde p_b a p_c jsou zřejmé analogie poloroviny p_a. Využijeme toho, že poloroviny p_a, p_b, p_c jsou tvořeny právě těmi body X, které po řadě splňují nerovnosti se skalárními součiny vektorů

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0, \quad \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0, \quad \text{resp.} \quad \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0.$$

Naší úlohou je ukázat, že pro každý bod X je aspoň jedna z těchto tří nerovností splněna. Plyne to však okamžitě z toho, že součet jejich levých stran je roven nule:

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GX} = \big(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\big) \cdot \overrightarrow{GX} = 0,$$

neboť pro těžiště G je součet $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ roven nulovému vektoru.

Poznámka. Užitím vektorové algebry lze přehledně vyložit i první část druhého řešení. Z obecně platných vektorových rovností

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{GX} - \overrightarrow{GA} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{S_AX} = \overrightarrow{GX} - \overrightarrow{GS_A} = \overrightarrow{GX} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

plynou vyjádření

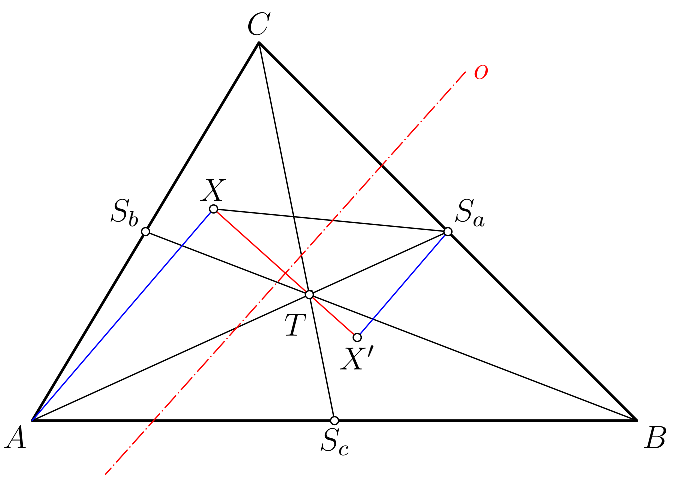
$$|AX|^2 = |GX|^2 + |GA|^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX}, \quad \text{resp.} \quad |S_AX|^2 = |GX|^2 + \tfrac{1}{4}|GA|^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX}.$$

Za předpokladu $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GX} \geqq 0$ odtud plyne $|AX|^2 \leqq 4|S_AX|^2$, jak pro naše řešení potřebujeme.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme T těžiště trojúhelníku ABC a uvažujme stejnolehlost $\varkappa$ se středem v bodě T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Body S_a, S_b a S_c jsou po řadě obrazy bodů A, B a C ve stejnolehlosti $\varkappa$. Označme dále X' obraz bodu X ve stejnolehlosti $\varkappa$. Z vlastností stejnolehlosti plyne $|XA| = 2|X'S_a|$, $|XB| = 2|X'S_b|$ a $|XC| = 2|X'S_c|$. Užitím těchto rovností dokazovanou nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar

$$\min\left\{\frac{|X'S_a|}{|XS_a|}, \frac{|X'S_b|}{|XS_b|}, \frac{|X'S_c|}{|XS_c|}\right\} \leqq 1. \tag{5}$$

V případě $X = T$ $(= X')$ tato nerovnost zřejmě platí. Nechť dále $X \neq T$, pak jistě $X \neq X'$. Označme o osu úsečky XX'. Předpokládejme, že nerovnost (5) pro některý bod X neplatí, dostaneme tak $|X'S_a|/|XS_a| > 1$, $|X'S_b|/|XS_b| > 1$ a $|X'S_c|/|XS_c| > 1$. Odtud plyne, že body S_a, S_b a S_c jsou vnitřními body poloroviny oX. Tedy i všechny body trojúhelníku $S_aS_bS_c$ jsou vnitřními body této poloroviny. To je ovšem spor, protože jeho těžiště T,* tedy vnitřní bod, je zřejmě bodem poloroviny opačné. Tím jsme dostali spor s předpokladem, že nerovnost (5) neplatí.



Obr. 5

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Seznamte se s Apolloniovými kružnicemi a jejich konstrukcemi. Jsou to množiny bodů významné vlastnosti, která je v následujícím tvrzení určena parametrem λ a body P a Q: Mějme dáno kladné reálné číslo $\lambda \neq 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Pak platí, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují rovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda, \tag{1}$$

je jistá kružnice. Tato (Apolloniova) kružnice je kružnice nad průměrem MN, kde M a N jsou ty dva body přímky PQ, pro které rovnice (1) po dosazení $X = M$, resp. $X = N$ přejde v platnou rovnost. [Viz část I kapitoly 5 brožury *S. Horák: Kružnice*, dostupné na `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589`. Jiný podrobný výklad najdete v návodných úlohách k úloze 63–A–I–6.]

N2. Mějme dáno reálné číslo $\lambda > 1$ a dva různé body P a Q v rovině ϱ. Dokažte, že množinou všech bodů $X \in \varrho$, $X \neq Q$, které vyhovují nerovnici

$$\frac{|PX|}{|QX|} > \lambda,$$

* Toto známé tvrzení plyne například z uvažované stejnolehlosti.

je vnitřek kruhu omezeného Apolloniovou kružnicí, která je určena rovnicí (1) z úlohy N1. [Uvažte dvě Apolloniovy kružnice

$$\frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_1 > 1 \quad \text{a} \quad \frac{|PX|}{|QX|} = \lambda_2 > 1.$$

První z nich je kružnice nad průměrem M_1N_1, druhá je kružnice nad průměrem M_2N_2, kde M_1N_1 a M_2N_2 jsou jisté úsečky na přímce PQ. Tvrzení úlohy N2 bude dokázáno, když vysvětlíme, proč v případě $\lambda_1 < \lambda_2$ leží body M_2, N_2 uvnitř úsečky M_1N_1.]

D1. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BC takové, že velikosti výšek v_b, v_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici. [Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $2S = b \cdot v_b = c \cdot v_c$, a proto $b : c = v_c : v_b = 2 : 1$. Vyhovující body A tedy leží na Apolloniově kružnici $|CX|/|BX| = 2$.]

D2. V rovině ϱ je dána úsečka BC. Uvažujme body $A \in \varrho$ mimo přímku BC takové, že velikosti těžnic t_b, t_c na strany AC, AB trojúhelníku ABC jsou v poměru $1 : 2$. Dokažte, že všechny tyto body A leží na jedné kružnici. [Pro těžiště G trojúhelníku ABC platí $|BG| = \frac{2}{3}t_b$ a $|CG| = \frac{2}{3}t_c$, takže $|BG| : |CG| = 1 : 2$. Všechny body G tedy leží na jedné Apolloniově kružnici, proto všechny body A leží na jejím obraze ve stejnolehlosti se středem ve středu úsečky BC, která má koeficient 3.]

D3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, přičemž $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Najděte množinu všech bodů X této roviny, které neleží na přímce S_1S_2 a mají tu vlastnost, že úsečky S_1X, S_2X protínají po řadě kružnice k_1, k_2 v bodech, jejichž vzdálenosti od přímky S_1S_2 jsou stejné. [63–A–II–2]

D4. V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. [63–A–I–6]

6. *Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?*

(Martin Melicher)

ŘEŠENÍ. Počet žárovek n má v zadání úlohy hodnotu 70. Zapíšeme celý postup tak, aby bylo jasné, že je použitelný pro každé $n \geqq 5$.

V první části řešení budeme předpokládat, že máme připravené přepínače tak, že s nimi lze rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek. Pak pro každou čtveřici žárovek existuje série stlačení, jejíž aplikací nakonec „přepneme“ (tj. změníme stav rozsvícení či zhasnutí) právě tyto 4 žárovky. V dalším textu budeme psát o „přepínání dané skupiny žárovek“ bez zdůrazňování, že ostatní žárovky přitom zůstanou nepřepnuty. Budeme-li uvažovat stlačení přepínačů v několika sériích za sebou, budeme počítat změny stavů žárovek ne po jednotlivých stlačeních, ale po jednotlivých sériích.

Protože lze sérií stlačení přepnout libovolnou *čtveřici* žárovek, musí jít vhodnou sérií přepnout i libovolnou *dvojici* žárovek, řekněme (a, b) – uvážíme k tomu další tři různé* žárovky c, d, e a po přepnutí (a, c, d, e) následovaném přepnutím (b, c, d, e) dosáhneme změnu stavu právě žárovek a, b (ty byly přepnuty každá jednou, zatímco c, d, e každá dvakrát, ostatní žárovky ani jednou).

Když lze (jak už víme) sérií stlačení přepnout libovolnou *dvojici* žárovek, musí jít přepnout i libovolnou *skupinu o sudém počtu* žárovek – stačí je spárovat do dvojic a přepínat po nich. V dalším odstavci vysvětlíme, proč takových skupin je právě 2^{n-1}.

Chceme dokázat, že každá n-prvková množina má právě 2^{n-1} podmnožin se sudým počtem prvků. K tomu nejprve uvážíme nějakých $n - 1$ prvků dané množiny. Každý z nich můžeme do sestavované podmnožiny buď zahrnout, nebo nezahrnout, takže podle pravidla součinu máme pro tyto volby právě 2^{n-1} možností. Počet takto vybraných prvků je pak buď sudé, nebo liché číslo. Podle toho poslední, dosud neuvažovaný prvek původní množiny k prozatím vybraným prvkům přiřadíme, resp. nepřiřadíme. Dostaneme tak 2^{n-1} různých podmnožin se sudým počtem prvků. Protože je zřejmé, že popsanou konstrukcí dostaneme *každou* z podmnožin se sudým počtem prvků, je důkaz hotov.

Z dosavadních úvah plyne, že pro každou vyhovující skupinu přepínačů musíme jejich postupným stlačováním dosáhnout alespoň 2^{n-1} různých stavů rozsvícení daných n žárovek. Zřejmě nezáleží na tom, v jakém pořadí v dané sérii přepínače stlačujeme, neboť u každé žárovky hraje roli pouze to, kolikrát byla přepnuta. Navíc ani konkrétní počet přepnutí dané žárovky není podstatný, výsledek záleží jen na tom, zda je tento počet sudý, nebo lichý. Nemá proto smysl uvažovat takové série, kde je některý přepínač stisknut vícekrát.** V jedné sérii pro každý přepínač tak budeme mít jen dvě možnosti – nepoužít, nebo použít jednou. Při užití k přepínačů tudíž dosáhneme nejvýše 2^k různých stavů rozsvícení žárovek. Máme-li proto jimi dosáhnout potřebných 2^{n-1} různých stavů, musí platit nerovnost $2^k \geqq 2^{n-1}$ neboli $k \geqq n - 1$. (Pro danou hodnotu $n = 70$ to znamená, že $k \geqq 69$.)

* Tady potřebujeme předpoklad $n \geqq 5$. Ostatně pro $n = 4$ je úloha triviální – stačí nám jeden přepínač, který změní stav všech čtyř žárovek.

** Lze to rovněž vysvětlit konstatováním, že dvě stlačení téhož přepínače se navzájem ruší.

V druhé části řešení ukážeme, že $k = n - 1$ přepínačů ke splnění zadaného cíle stačí. Očíslujme si žárovky $1, 2, \ldots, n$ a přepínače $1, 2, \ldots, n-1$. Pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nastavme přepínač i tak, aby přepnul (právě) žárovky i a n. Dokážeme, že takovým nastavením přepínačů dokážeme rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (a, b, c, d), kde $1 \leqq a < b < c < d \leqq n$.

V případě $d < n$ úkol splníme tak, že postupně stlačíme přepínače a, b, c a d – tím se každá žárovka ze čtveřice (a, b, c, d) přepne právě jednou, žárovka n právě čtyřikrát a ostatní žárovky se nepřepnou ani jednou.

Jak vyřešit úkol ve zbylém případě $d = n$? Tehdy stačí stlačit postupně přepínače a, b a c – tím přepneme žárovky a, b, c právě jednou, žárovku n právě třikrát a ostatní žárovky se nepřepnou ani jednou.

Závěr. Nejmenší počet vyhovujících přepínačů je 69.

Návodné a doplňující úlohy:

Ve všech úlohách pracujeme s pojmy „žárovka" a „přepínač" ve významu ze soutěžní úlohy.

N1. Určete počet možných stavů rozsvícení žárovek 1, 2, 3 a 4, které lze dosáhnout užitím přepínačů $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ a $\{3, 4\}$ (např. přepínač $\{3, 4\}$ vždy přepne právě žárovky 3 a 4). [Čtyři stavy (včetně toho původního). Uvědomme si, že pořadí stlačování přepínačů v dané sérii nemá vliv na celkový výsledek. Rovněž nemá smysl žádný přepínač užít v jedné sérii vícekrát. Stačí tedy najít výsledný stav pro každou z 2^3 podmnožin dané množiny 3 přepínačů, které můžeme stlačit, a pak spočítat, kolik těchto stavů je různých. Výhodné je přitom výsledné stavy určovat takto: $\{1, 2, 3\} + \{3, 4\} \sim \{1, 2, 4\}$. Z toho příkladu vidíme, že přepínač $\{1, 2, 4\}$ je možné v zadání úlohy vynechat.]

N2. Dokažte, že pokud máme n přepínačů, kde n je přirozené číslo, tak postupným přepínáním můžeme dosáhnout nejvýše 2^n různých stavů rozsvícení (včetně původního). [Podle úvahy z řešení N1 platí, že počet dosažitelných stavů nepřevyšuje počet všech podmnožin dané množiny přepínačů.]

N3. Dokažte, že pokud by v soutěžní úloze byl cíl pozměněn na možnost rozsvítit každou trojici žárovek, tak při jeho splnění by bylo možné rozsvítit každou jednotlivou žárovku. [K rozsvícení jediné zvolené žárovky a vybereme tři další žárovky b, c, d a aplikujeme postupně 3 série rozsvícení, a to pro trojice (a, b, c), (a, b, d) a (a, c, d).]

N4. Kolik má daná n prvková množina těch podmnožin, které mají sudý počet prvků? [2^{n-1} podmnožin. Postupujeme obdobně jako při známém důkazu, že počet *všech* podmnožin je 2^n: Prvních $n - 1$ prvků můžeme do konstruované podmnožiny buď zařadit, nebo nezařadit, takže máme 2^{n-1} možností. Po této proceduře máme vybrán buď sudý, nebo lichý počet prvků, a tak podle toho k nim nezařadíme, resp. zařadíme poslední n-tý prvek. Takto dostaneme právě 2^{n-1} vyhovujících podmnožin. Zbývá si uvědomit, že popsaným postupem dostaneme *každou* vyhovující podmnožinu.]

D1. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $2k$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 3, 34 \rangle$. [Taková úloha je ekvivalentní se soutěžní úlohou. Nechť dále (a, b) je libovolná dvojice žárovek a c_i značí žárovky různé od a, b, přičemž $c_i \neq c_j$ pro $i \neq j$. Lze-li rozsvítit $2k$-tice $(a, c_1, \ldots, c_{2k-1})$ a $(b, c_1, \ldots, c_{2k-1})$, tak lze rozsvítit i dvojici (a, b), a tedy i libovolnou čtveřici (po dvou dvojicích). Naopak, lze-li rozsvítit čtveřice (a, c_1, c_2, c_3) a (b, c_1, c_2, c_3), lze rozsvítit i dvojici (a, b), takže pak lze rozsvítit i každou $2k$-tici (po k dvojicích).]

D2. Řešte soutěžní úlohu se 70 žárovkami s pozměněnou podmínkou, že máme být schopni rozsvítit každou $(2k - 1)$-tici žárovek, kde k je dané přirozené číslo z intervalu $\langle 2, 35 \rangle$. [70 přepínačů. Podobně jako v řešení D1 úvahou o dvou $(2k - 1)$-ticích $(a, c_1, \ldots, c_{2k-2})$ a $(b, c_1, \ldots, c_{2k-2})$ zjistíme, že lze rozsvítit každou dvojici (a, b). Nyní úvahou o jedné $(2k - 1)$-tici $(a, c_1, \ldots, c_{2k-2})$ a $k - 1$ dvojicích $(c_1, c_2), \ldots, (c_{2k-3}, c_{2k-2})$ zjistíme, že lze rozsvítit libovolnou žárovku a, a tedy i každou z 2^{70} množin žárovek, takže podle výsledku úlohy N2 potřebujeme aspoň 70 přepínačů. 70 přepínačů ale stačí – jeden přepínač na každou žárovku.]