70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Z číslic* 0 *až* 9 *vytvoříme dvoumístná čísla* AB, CD, EF, GH, IJ, *přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet* $AB + CD + EF + GH + IJ$ *a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu* 07 *nepovažujeme za dvoumístná čísla.)* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Hodnota zkoumaného součtu

$$S = AB + CD + EF + GH + IJ$$

závisí pouze na tom, kterých pět číslic se nachází v sestavených číslech na místě desítek, a kterých pět na místě jednotek. Určíme-li totiž součty čísel v obou zmíněných pěticích

$$S_1 = A + C + E + G + I \quad \text{a} \quad S_0 = B + D + F + H + J,$$

budeme zřejmě mít $S = 10S_1 + S_0$. Podle zadání úlohy sčítance v obou součtech S_1 a S_0 dohromady tvoří všech 10 číslic od 0 po 9. Proto je součet $S_1 + S_0$ stejný jako součet $0 + 1 + \ldots + 9$, který je roven 45. Platí tedy $S_0 = 45 - S_1$, a tak pro součet S dostáváme vyjádření

$$S = 10S_1 + S_0 = 10S_1 + (45 - S_1) = 9S_1 + 45 = 9 \cdot (S_1 + 5).$$

Pro řešení naší úlohy stačí podle posledního vzorce zjistit, jakých hodnot může nabývat součet S_1. Je to součet číslic A, C, E, G, I na místech desítek pěti dvoumístných čísel, a tak to podle zadání může být součet libovolných pěti různých *nenulových* číslic – zbylými pěti nezastoupenými číslicemi (včetně nuly) pak totiž můžeme jakkoli obsadit místa jednotek vytvářených čísel. Pro součet takových pěti číslic zřejmě platí

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \leqq A + C + E + G + I \leqq 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35.$$

Přesvědčíme se, že součet $S_1 = A + C + E + G + I$ může nabývat všech 21 hodnot v rozmezí 15 až 35. Například hodnotu 16 dostaneme tak, že v pětici $1, 2, 3, 4, 5$ největší číslo 5 změníme na číslo 6. Takto můžeme pokračovat ve zvětšování součtu S_1 vždy o 1 tak dlouho, až dostaneme pětici $1, 2, 3, 4, 9$. Poté začneme o jedničku opakovaně zvětšovat číslo 4, až dostaneme pětici $1, 2, 3, 8, 9$. Podobně pokračujeme dále, až nakonec dojdeme k pětici $5, 6, 7, 8, 9$. Postupně tak skutečně dostaneme každou celočíselnou hodnotu součtu S_1 v rozmezí 15 až 35 (kterých je 21).

Díky poslednímu zjištění podle dříve odvozeného vzorce $S = 9 \cdot (S_1 + 5)$ docházíme k závěru, že zkoumaný součet $AB+CD+EF+GH+IJ$ může nabývat právě 21 hodnot, kterými jsou násobky devíti v rozmezí od 180 do 360 (hraniční hodnoty jsme spočítali jako $9 \cdot (15 + 5) = 180$ a $9 \cdot (35 + 5) = 360$).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9. [$AB - BA = (10 \cdot A + B) - (10 \cdot B + A) = 9(A - B)$.]

N2. Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.

a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.

b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB + CD$.

[a) Minimum je 37, maximum je 73. Minimum, resp. maximum dostaneme, když umístíme nejmenší číslice 1 a 2 na pozice desítek, resp. na pozice jednotek. b) 9. Každé vytvořené číslo $AB + CD$ dává při dělení devíti stejný zbytek jako číslo $A + B + C + D$ rovné $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, dává tedy zbytek 1. Proto je rozdíl každých dvou vytvořených čísel $AB + CD$ dělitelný devíti, tudíž hledané minimum je kladným násobkem čísla 9. Že to není více než 9, ukazuje příklad $(12 + 43) - (12 + 34) = 9$.]

N3. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15. [Najít nejmenší a největší hodnotu nestačí. Je potřeba popsat, jak zkonstruovat kterýkoliv přípustný součet, například 13. Popis může vypadat jako algoritmus, který projde všechny součty od 6 do 15. Když začneme s trojicí 1, 2, 3, můžeme číslo 3 opakovaně zvětšovat o jedna tak dlouho, až dostaneme trojici 1, 2, 6. Poté začneme zvětšovat číslo 2, až dostaneme 1, 5, 6. Nakonec budeme zvětšovat číslo 1, až dostaneme 4, 5, 6, čímž celkově projdeme všechna čísla od 6 do 15.]

D1. Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách? [61–C–II–2]

D2. Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší. [68–B–I–1]

2. *Jaká je největší možná hodnota výrazu $xy-x^3y-xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje?* (Mária Dományová, Patrik Bak)

Řešení. Z úpravy daného výrazu V na součin

$$V = xy - x^3y - xy^3 = xy \cdot (1 - x^2 - y^2)$$

předně vidíme, že pokud je činitel $1 - x^2 - y^2$ záporný, je záporný i výraz V. Proto dále stačí uvažovat jen taková kladná x a y, pro která platí $1 - x^2 - y^2 > 0$, jak se stane například pro $x = y = \frac{1}{2}$, obecněji pro libovolná x, y blízká nule.

Díky učiněnému omezení můžeme hodnotu V odhadnout shora tak, že nejprve odhadneme součin xy podle známé AG-nerovnosti, která je dokázána v návodné úloze 1. V ní položíme $u = x^2$ a $v = y^2$. Dostaneme tak nerovnost $xy \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Z ní po vynásobení obou stran kladným číslem $1 - x^2 - y^2$ obdržíme horní odhad

$$V = xy \cdot (1 - x^2 - y^2) \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \cdot \bigl(1 - (x^2 + y^2)\bigr). \tag{1}$$

Když nyní označíme $t = x^2 + y^2$, zbývá nám najít maximum kvadratické funkce $f(t) = t(1 - t)$ pro $t \in (0, 1)$. Toto maximum je možné najít opětovným užitím AG-nerovnosti. Tentokrát v ní zvolíme (opět kladné) hodnoty $u = t$ a $v = 1 - t$, kde $t = x^2 + y^2$. Protože $u + v = 1$, má AG-nerovnost tvar $\sqrt{t(1-t)} \leqq \frac{1}{2}$, z něhož po umocnění na druhou dostaneme $t(1 - t) \leqq \frac{1}{4}$. Po dosazení $t = x^2 + y^2$ tak vychází

$$(x^2 + y^2) \cdot \bigl(1 - (x^2 + y^2)\bigr) \leqq \frac{1}{4}.$$

Z odhadu (1) tudíž plyne $V \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Je nalezené číslo $\frac{1}{8}$ možnou hodnotou výrazu V? A pokud ano, pro které přípustné dvojice x, y se dosahuje? Odpověď nám poskytne předchozí postup. Podle něho dosáhne rovnosti $V = \frac{1}{8}$, právě když v obou uplatněných AG-nerovnostech nastane rovnost. Jak je známo, bude tomu tak, právě když bude platit $u = v$ pro obě využité dvojice čísel u, v. V naší situaci jde o rovnosti $x^2 = y^2$ a $t = 1 - t$ pro $t = x^2 + y^2$. Ekvivalentní podmínka $x^2 = y^2 = \frac{1}{4}$ odpovídá jediné přípustné dvojici $(x, y) = \bigl(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\bigr)$.

Závěr. Největší možná hodnota daného výrazu je $\frac{1}{8}$. Výraz ji nabývá pro jedinou dvojici $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Poznámka. Obě v řešení využité nerovnosti

$$xy \leqq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{a} \quad t(1 - t) \leqq \frac{1}{4}$$

lze bez odkazu na AG-nerovnost snadno dokázat úpravami „na čtverec“, tj. přepisem do ekvivalentních tvarů

$$\frac{1}{2}(x - y)^2 \geqq 0, \quad \text{resp.} \quad \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0.$$

Z nich také plynou nutné i postačující podmínky podmínky pro případy rovnosti, tj. $x = y$, resp. $t = \frac{1}{2}$ (jakož i platnost obou nerovností pro libovolná reálná čísla x, y, t bez ohledu na jejich znaménka).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u = v$. [Zřejmě platí $\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geqq 0$. Po roznásobení levé strany tuto nerovnost přepíšeme do tvaru $u - 2\sqrt{uv} + v \geqq 0$, což konečně upravíme na požadované $\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v)$. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\sqrt{u} - \sqrt{v} = 0$, což je ekvivalentní $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, tedy i $u = v$. Poznámka. Jelikož výraz na levé straně nerovnosti je *geometrickým* průměrem dvou nezáporných reálných čísel u, v a výraz na pravé straně je jejich *aritmetickým* průměrem, nazývá se uvedená nerovnost *nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem* dvou nezáporných reálných čísel, zkráceně *AG-nerovnost*. Podobná stejně pojmenovaná nerovnost platí i pro n-tice nezáporných čísel.]

N2. Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla. [a) $\frac{1}{4}$. Pokud jsou obě čísla t a $1-t$ kladná, napište pro ně AG-nerovnost. Rozmyslete případy, kdy nejsou obě čísla kladná. Alternativní možností je úprava na čtverec: $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$. b) $\frac{1}{4}$. Substituce $t = uv$ vede na případ a). c) $\frac{1}{4}$. Substituce $t = u^2+v^2$ vede na případ a).]

D1. Pro reálná čísla a, b najděte největší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

[Maximum je $\frac{1}{2}$ (pro $a = b$). Jistě se stačí omezit na případ, kdy $a > 0$ a $b > 0$. Použijte AG-nerovnost pro dvojici čísel a^2 a b^2. Jinak je možno vyjít z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$, upravené do tvaru $2ab \leqq a^2+b^2$.]

D2. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b=2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

[68–B–II–1]

D3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$. [Sečtením tří nerovností $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, $c^2+a^2 \geqq 2ca$ získáme nerovnost, kterou pak stačí vydělit dvěma.]

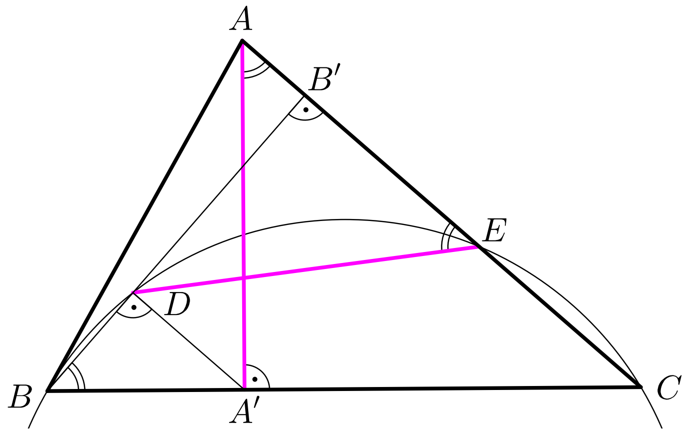
D4. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2+b^2=1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}.$$

[68–B–I–4]

3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.* (Patrik Bak)

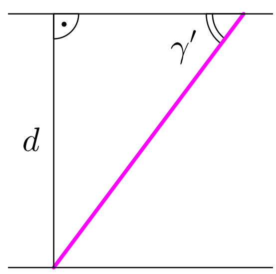
Řešení. Výšky AA' a BB' leží uvnitř trojúhelníku ABC, neboť je podle zadání ostroúhlý. Proto pro pravoúhlé trojúhelníky $AA'C$ a $BB'C$ platí, že jejich úhly u vrcholů A, resp. B (vyznačené na obr. 1) mají tutéž velikost γ', která doplňuje obvykle značený úhel γ u vrcholu C do $90°$. Z pravoúhlého trojúhelníku $BB'C$ s bodem A' uvnitř přepony BC dále plyne, že jeho kolmý průmět D je vnitřním bodem odvěsny BB'. Proto má velikost γ' i úhel $A'BD$ neboli CBD.



Obr. 1

Podle zadání je bod E vnitřním bodem strany AC, který leží na kružnici opsané trojúhelníku BDC . Oblouk BDC této kružnice leží v polorovině BCA, takže bod E leží na tomto oblouku, a to mezi body D a C, neboť bod D je vnitřním bodem poloroviny ACB. Proto je čtyřúhelník $BCED$ konvexní a tětivový. Protože má u vrcholu B ostrý úhel velikosti γ', má u protějšího vrcholu E tupý úhel velikosti $180° - \gamma'$. K němu vedlejší úhel AED má tedy velikost γ', jak je také vyznačeno na obr. 1. Ukážeme, že to už nám stačí ke kýženému důkazu shodnosti vybarvených úseček DE a AA'.

Přímky AC a $A'D$ rovnoběžné, protože jsou obě kolmé na výšku BB'. Označme d jejich vzdálenost. Délky obou zkoumaných úseček pak můžeme vyjádřit stejným zlomkem $d/\sin\gamma'$ (jak je patrné z obr. 2). Tím je řešení úlohy hotovo.



Obr. 2

Poznámka. Bez užití trigonometrie lze řešení dokončit úvahou o průsečíku X úseček AA' a DE. Díky shodným úhlům EAX, AEX i k nim střídavým úhlům $XA'D$, XDA'

jsou trojúhelníky AEX a $A'DX$ rovnoramenné se společným hlavním vrcholem X. Platí proto rovnosti $|DX| = |A'X|$ a $|XE| = |XA|$, jejich sečtením už dostaneme potřebný výsledek $|DE| = |AA'|$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC je svými výškami rozdělen na šest nepřekrývajících se trojúhelníků. Zjistěte, zda některé z nich jsou podobné. Pokud ano, existují mezi nimi tři navzájem podobné trojúhelníky? [Každý trojúhelník je podobný s právě jedním z ostatních pěti trojúhelníků. Využijte toho, že jde o pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ostré vnitřní úhly při stranách trojúhelníku ABC doplňují jeho vnitřní úhly do 90°.]

N2. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$.
a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$.
b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší.
c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$ byl co největší.
[V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočtěte úhly, nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. V a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v b) nezávisle na volbě δ. V c) vyjde součet 180° nezávisle na poloze bodu A nebo A'. Tvrzení c) má známé zobecnění: Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet velikostí jeho protilehlých úhlů je 180°.]

D1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme A', B', C' paty jeho výšek a H jeho ortocentrum (průsečík výšek AA', BB', CC'). Najděte všech 6 tětivových čtyřúhelníků s vrcholy v bodech A, B, C, A', B', C', H. [Hledejte pravé úhly a Thaletovy kružnice: Body A', B' leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, takže čtyřúhelník $ABA'B'$ je tětivový a podobně $BCB'C'$ a $CAC'A'$. Body B', C' leží na Thaletově kružnici nad průměrem AH, takže čtyřúhelník $AB'HC'$ je tětivový a podobně $BC'HA'$ a $CA'HB'$.]

D2. V rovině jsou dány kružnice m a n, které se protínají v bodech K a L. Na kružnici m leží body A, D, K, L a na kružnici n leží body B, C, K, L v těchto pořadích, přičemž body A, L, B leží na přímce a body C, K, D leží na jiné přímce v těchto pořadích. Dokažte, že $AD \parallel BC$. [Označme $|\sphericalangle LBC| = \beta$. Pak $|\sphericalangle LKC| = 180° - \beta$, $|\sphericalangle LKD| = \beta$ a $|\sphericalangle LAD| = 180° - \beta$. Z rovnosti $|\sphericalangle LBC| + |\sphericalangle LAD| = 180°$ plyne $AD \parallel BC$.]

D3. Zvolme libovolné body A', B', C' uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ procházejí týmž bodem. [O průsečíku dvou kružnic ukážeme, že leží na třetí kružnici. Předpokládejme, že například kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$ a $BC'A'$ se protnou kromě bodu C' ještě v bodě M uvnitř trojúhelníku ABC. Pak z tětivového čtyřúhelníku $AC'MB'$ plyne rovnost $|\sphericalangle CB'M| = |\sphericalangle AC'M|$. Z tětivového čtyřúhelníku $BA'MC'$ plyne rovnost $|\sphericalangle AC'M| = |\sphericalangle BA'M|$. Dohromady dostáváme rovnost $|\sphericalangle CB'M| = |\sphericalangle BA'M|$, takže čtyřúhelník $CB'MA'$ je tětivový. Podobně se rozeberou případy, že kružnice opsané trojúhelníkům $AB'C'$ a $BC'A'$ se dotýkají (tedy $M \equiv C'$) nebo bod M neleží uvnitř trojúhelníku ABC. Bod M se v literatuře označuje termínem *Miquelův bod*.]

4. *Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru k má soustava rovnic*

$$\begin{aligned} |x+6|+2|y| &= 24,\\ |x+y|+|x-y| &= 2k \end{aligned}$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel. (Pavel Calábek)

Řešení. Všimneme si, že když je dvojice (x, y) řešením soustavy, je jím i dvojice $(x, -y)$. Řešení tedy typicky „přicházejí po dvou“. Například kdyby byla dvojice $(x, y) = (2, 8)$ řešením, bude jím i dvojice $(2, -8)$. Pouze v případě, kdy $y = -y$ neboli $y = 0$, nejsou taková dvě řešení (x, y) a $(x, -y)$ navzájem různá.

Daná soustava tak může mít lichý počet řešení pouze v případě, kdy pro $y = 0$ existuje x splňující obě rovnice. V takovém případě se první rovnice zjednoduší na $|x + 6| = 24$, takže nutně je buď $x = 18$, nebo $x = -30$. Z druhé rovnice pak plyne, že dvojice $(18, 0)$ je řešením pro $k = 18$ a dvojice $(-30, 0)$ je řešením pro $k = 30$. V obou případech neexistuje žádné jiné řešení (x, y), pro které je $y = 0$, takže soustava má lichý počet řešení jak pro $k = 18$, tak i pro $k = 30$, pokud ovšem pro tato dvě k není řešení *nekonečně mnoho.* Skutečnost, že zadaná soustava má jen konečný počet řešení, plyne (i pro obecné k) z toho, že každé z nich je řešením jedné ze 16 soustav, které dostaneme, když v „neurčité“ soustavě

$$\begin{aligned} \pm(x+6) \pm 2y &= 24,\\ \pm(x+y) \pm (x-y) &= 2k \end{aligned}$$

jakkoli vybereme znaménka. Vysvětlíme nyní, že každá z těchto 16 soustav má právě jedno řešení. Levá strana druhé rovnice je totiž rovna jednomu ze čtyř výrazů $\pm 2x$ nebo $\pm 2y$, proto při daném k druhá rovnice vede vždy k jednoznačnému určení jedné z neznámých x či y, zatímco druhá neznámá může mít libovolnou hodnotu — tu poté zřejmě jednoznačně určíme z první rovnice po dosazení určené hodnoty první neznámé. Proto má soustava rovnic ze zadání úlohy vždy nejvýše 16 řešení.*

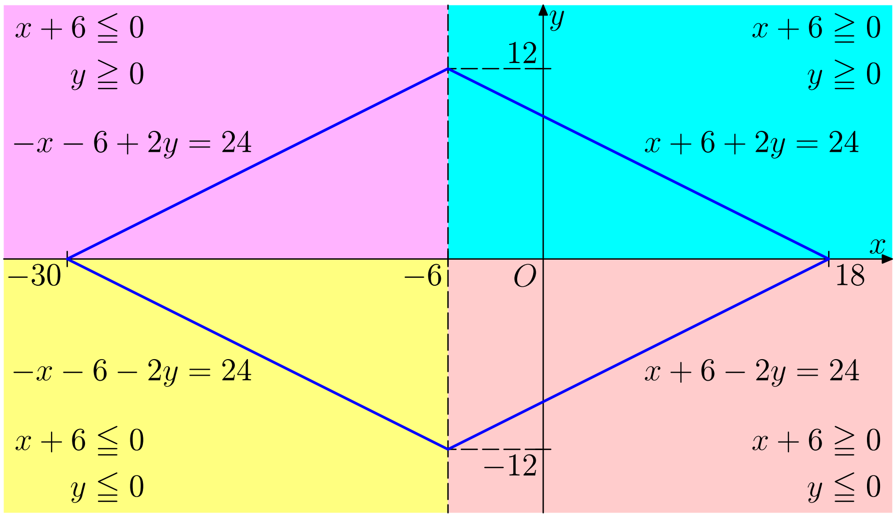
Závěr. Hledané hodnoty parametru k jsou právě dvě, a to čísla 18 a 30.

Jiné řešení. V rovině zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy a podíváme se, jak geometricky vypadá množina bodů $[x, y]$ odpovídajících první rovnici a jak množina bodů $[x, y]$ odpovídajících druhé rovnici. Průnik těchto dvou množin pak bude tvořen právě těmi body $[x, y]$, které odpovídají řešením zadané soustavy.

Rozborem znamének výrazů v absolutní hodnotě (viz obr. 1) snadno zjistíme, že pro první rovnici se jedná o hranici kosočtverce se středem v bodě $[-6, 0]$, jehož vrcholy jsou v bodech $[18, 0]$, $[-6, 12]$, $[-30, 0]$ a $[-6, -12]$. Například v oblasti, která je vymezena nerovnostmi $x+6 \leqq 0$ a $y \geqq 0$, rovnice odpovídá přímce $-x-6+2y = 24$ a vyhovující body tak vytvoří úsečku, kterou tato přímka na dané oblasti vytíná. Analogicky postupujeme ve zbylých třech oblastech.

Pro druhou rovnici nejprve zdůrazněme, že dále budeme uvažovat pouze *kladné* hodnoty parametru k. V případě $k < 0$ totiž zřejmě žádná dvojice (x, y) vyhovující

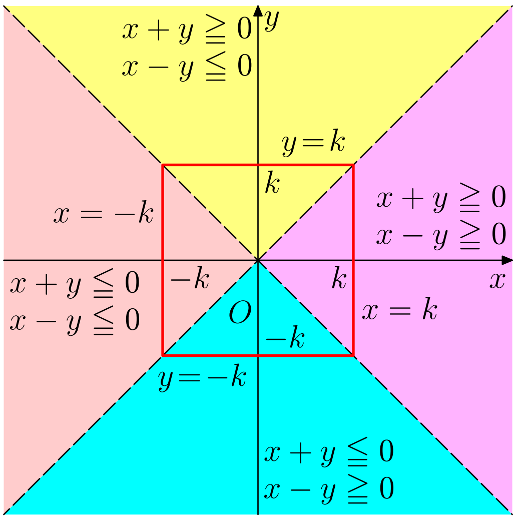
* To je samozřejmě velmi hrubý, byť v daný moment dostatečný odhad. Podle grafického postupu, který dále popíšeme, se snadno zjistí, že největší počet řešení je roven číslu 8, a to pro $k \in (10, 12)$.



Obr. 1

druhé rovnici neexistuje, takže počet řešení soustavy je roven sudému číslu 0. V případě $k = 0$ je tomu stejně tak, neboť z druhé rovnice tehdy plyne $(x, y) = (0, 0)$, avšak tato dvojice nesplňuje první rovnici.

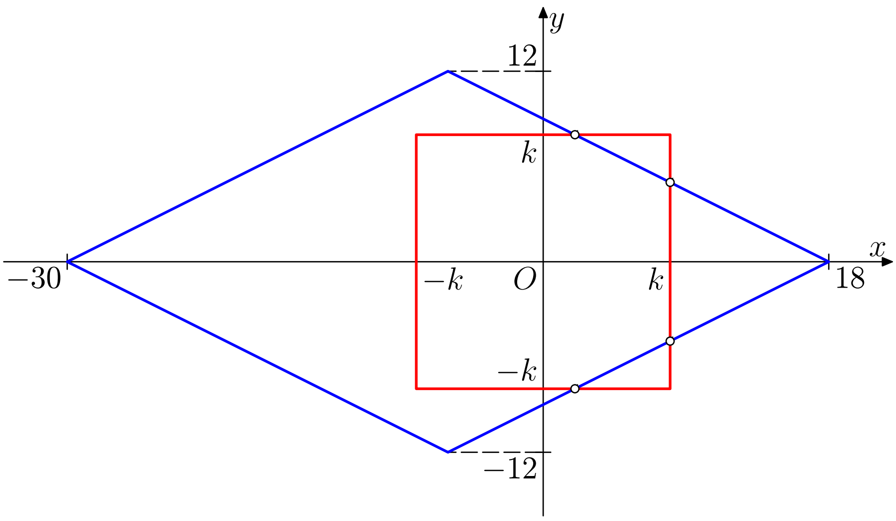
Pro každé $k > 0$ podobným rozborem jako u první rovnice zjistíme (obr. 2), že množina bodů odpovídajících druhé rovnici je tvořena hranicí čtverce se středem v počátku, jehož vrcholy jsou v bodech $[k, k]$, $[-k, k]$, $[-k, -k]$ a $[k, -k]$.



Obr. 2

Představme si nyní, že do prvního obrázku s „pevným“ kosočtvercem začneme přikreslovat „proměnný“ čtverec, který se bude měnit podle toho, jak parametr k bude probíhat interval všech kladných čísel (viz obr. 3 pro hodnotu $k = 8$).

Naší úlohou je nalézt všechny ty hodnoty $k > 0$, při kterých budou mít hranice obou čtyřúhelníků lichý počet společných bodů (říkejme dále *průsečíků*). Oba útvary jsou souměrné podle souřadnicové osy x, takže počet průsečíků nad osou x bude stejný jako počet průsečíků pod osou x. Zajímají nás proto pouze ty hodnoty parametru k, pro které existuje průsečík na ose x. To nastane pouze pro $k = 18$ a $k = 30$. V případě $k = 18$ budou v celé rovině zřejmě existovat celkem tři průsečíky, v případě $k = 30$ pouze jeden.



Obr. 3

Stejně jako v prvním řešení docházíme k závěru, že $k = 18$ a $k = 30$ jsou jediné dvě hledané hodnoty.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V kartézské soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici a) $|x| + |y| = 7$, b) $|x - 3| + |y| = 7$, c) $|x| + 2|y| = 10$. [a) V každém ze čtyř kvadrantů dostaneme rovnici přímky, celkovou množinou je hranice čtverce s vrcholy v bodech $[7, 0]$, $[0, 7]$, $[-7, 0]$, $[0, -7]$. b) Hranice čtverce posunutá o vektor $(3, 0)$ oproti čtverci z úlohy a). c) Hranice kosočtverce s vrcholy v bodech $[10, 0]$, $[0, 5]$, $[-10, 0]$, $[0, -5]$.]

N2. Rozmyslete si, jak v kartézské soustavě souřadnic Oxy vypadá množina množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují
a) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$,
b) $x \leqq y$ a zároveň $x \geqq -y$ a zároveň $|x + y| + |x - y| = 10$.
[a) Jedná se o průnik dvou polorovin s hraničními přímkami $x = y$, resp. $x = -y$. Výsledná množina je pravý úhel s vrcholem v počátku a vnitřním bodem $[0, 1]$. b) Po odstranění absolutních hodnot dostanete rovnici přímky. Průnikem této přímky s úhlem z úlohy a) je úsečka s krajními body $[-5, 5]$ a $[5, 5]$.]

N3. Zdůvodněte, proč pro libovolnou hodnotu reálného parametru k má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x + 6| + 2|y| &= 24, \\ |x + 6| + |y| &= k \end{aligned}$$

sudý počet řešení v oboru reálných čísel. [Obě odpovídající množiny bodů (hranice kosočtverce a čtverce) jsou souměrné podle osy x. Tudíž pro každé řešení (x, y) této soustavy rovnic, je i dvojice $(x, -y)$ jejím řešením. Pokud tedy pro každé řešení (x, y) platí $y \neq 0$, má soustava sudý počet řešení (hranice čtverce a kosočtverce nemohou mít nekonečně mnoho společných bodů). Pokud naopak má soustava řešení tvaru $(x, 0)$, je nutně $k = 24$. Pak existují právě dvě řešení $(-30, 0)$ a $(18, 0)$.]

D1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x| + y &= a, \\ 2|y| - x &= b \end{aligned}$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. [66–B–I–2]

D2. Užitím grafické metody a dále pak výpočtem určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
|x| + |y-1| &= 1,\\
|x-1| + |y| &= p,
\end{aligned}
$$

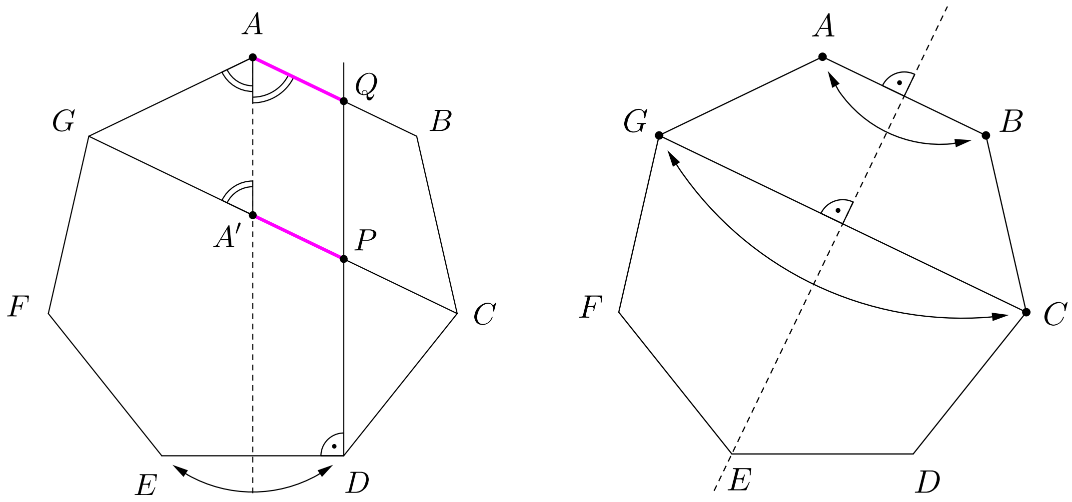
kde p je reálný parametr. [13–A–II–3]

5. *Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ|+|EF| = |GP|$.*
(Marián Poturnay)

Řešení. Uvažovaná kolmice ke straně DE vztyčená v bodě D nejprve protne v bodě P úhlopříčku CG a poté „opustí" daný sedmiúhelník ve vnitřním bodě Q jeho strany AB (obr. 1 vlevo). Abychom úsečky v dokazované rovnosti $|GP| = |EF| + |AQ|$ dostali k sobě „blíže", zaměníme v ní stranu EF shodnou stranou GA. Budeme tak dokazovat ekvivalentní rovnost

$$|GP| = |GA| + |AQ| \tag{1}$$

pro délky tří stran čtyřúhelníku $AQPG$. Postup, který přitom zvolíme, nám rovněž dosvědčí, že skutečně platí $|GP| > |AQ|$ (jak obr. 1 napovídá).



Obr. 1

Úsečky GP a AQ jsou předně rovnoběžné, neboť jsou obě kolmé na tutéž osu souměrnosti celého sedmiúhelníku, kterou je společná osa strany AB a úhlopříčky CG (obr. 1 vpravo). Jiná osa souměrnosti celého sedmiúhelníku, totiž osa strany DE, prochází vrcholem A a je rovnoběžná s přímkou PQ. Protože navíc leží v polorovině PQG, protne tato osa úhlopříčku CG v bodě, který leží mezi body P, G a který označíme A' (obr. 1 vlevo). Díky $A' \in GP$ platí rovnost $|GP| = |GA'| + |A'P|$, navíc z relací $A'P \parallel AQ$ a $PQ \parallel A'A$ plyne, že čtyřúhelník $AQPA'$ je rovnoběžník, a tedy $|A'P| = |AQ|$. Rovnosti z poslední věty dohromady znamenají, že

$$|GP| = |GA'| + |AQ|.$$

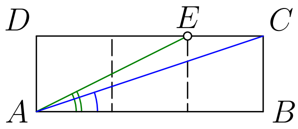
Tímto výsledkem je nerovnost $|GP| > |AQ|$ potvrzena. Významnější pro nás je však porovnání s rovností (1), kterou máme dokázat. Vidíme, že takový úkol splníme, jakmile ověříme rovnost $|GA| = |GA'|$. Rovnoramennost trojúhelníku $AA'G$ však plyne ze shodnosti tří úhlů vyznačených na obr. 1 vlevo: úhly QAA', $AA'G$ jsou střídavé úhly mezi rovnoběžkami AB, CG a shodnost úhlů QAA', GAA' plyne z toho, že polopřímka AA' jako osa souměrnosti celého sedmiúhelníku půlí jeho vnitřní úhel GAB.

Návodné a doplňující úlohy:

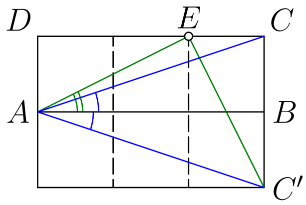
N1. Rozmyslete si, že pravidelný sedmiúhelník je osově souměrný a každá jeho úhlopříčka je rovnoběžná s některou z jeho stran. [Osa kterékoliv strany sedmiúhelníku je jeho osou souměrnosti. Rovnoběžnost vybrané úhlopříčky s vhodnou stranou dokažte z osové souměrnosti.]

D1. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC se standardně značenými úhly. Předpokládejme, že platí $|AB| < |AC|$. Na straně AC zvolme bod D tak, aby platilo $|\sphericalangle CBD| = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Dokažte, že $|AB| + |CD| = |AC|$. [Ukažte, že $|AB| = |AD|$. K tomu stačí ověřit rovnost $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ADB|$.]

D2. V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| = 3|BC|$ a na straně CD je zvolen bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAE| = 45°$.

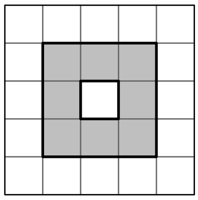


[Obdélník $ABCD$ s úhlopříčkou AC zobrazte v osové souměrnosti podle AB. Bod C se zobrazí na C'. Dokažte, že trojúhelník $AC'E$ je rovnoramenný a pravoúhlý.



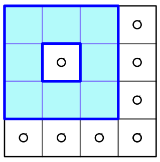
]

6. *Na plánu o rozměrech 12×12 čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?* (Jozef Rajník)



Řešení. V první části řešení vysvětlíme, proč v každém čtverci 4×4, který je částí daného plánu 12×12, musí být zasažena výstřelem aspoň dvě políčka.

Uvažme libovolný takový čtverec 4×4. Loď, kterou v něm umístíme jako na obr. 1 do levého horního rohu čtverce, neohrozí výstřel na kterékoli z osmi polí, které jsou na obrázku označené tečkou.



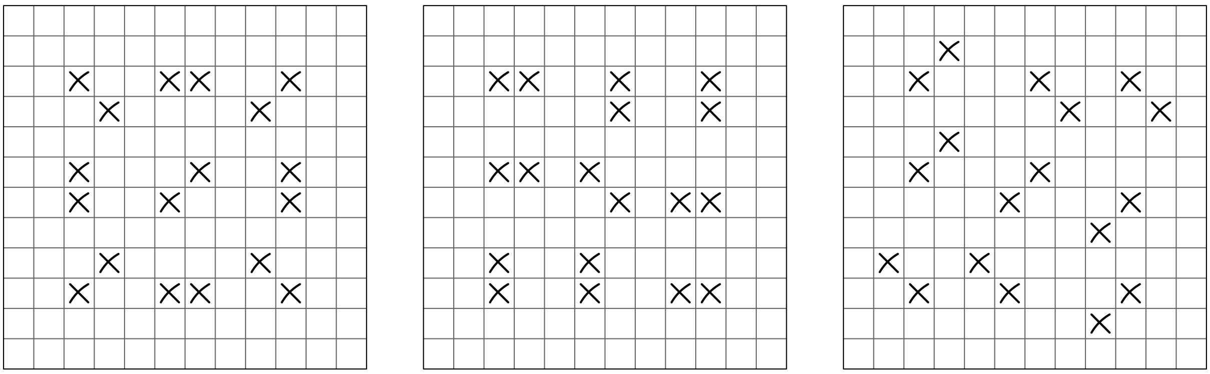
Obr. 1

Zopakujeme-li tuto úvahu pro lodě umístěné do zbylých tří rohů daného čtverce 4×4, označení tečkou zřejmě získá všech jeho 16 polí. (K tomu jen stačí obrázek 1 pootočit v jednom směru o 90°, 180° a 270°.)

Tvrzení z první věty našeho řešení je tak dokázáno. Doplňme jej (pouze pro zajímavost) o zřejmé konstatování, že dvěma vhodnými výstřely na čtverec 4×4 už v něm jakkoli umístěnou loď aspoň jednou zasáhneme.*

Nyní se již budeme věnovat celému čtverci 12×12. Ten zřejmým způsobem rozdělíme na 9 nepřekrývajících se čtverců 4×4. Jak už víme, v každém z nich musíme vystřelit na aspoň dvě políčka, takže v celém čtverci 12×12 musíme vystřelit na alespoň $9 \cdot 2 = 18$ políček. I když víme, že pro každý čtverec 4×4 dva výstřely stačí, závěr o tom, že 18 výstřelů stačí pro celý čtverec 12×12, předchozí úvaha ještě zdaleka nedokazuje! Loď lze totiž umístit tak, aby neležela celá v žádném z devíti sestrojených čtverců 4×4.

Zmíněnou hypotézu o dostatečném počtu 18 výstřelů je třeba zdůvodnit, nejsnáze (jedním) příkladem vyhovující volby 18 zasažených políček, kterou lze najít „cestou pokusů a omylů“. Takových příkladů je mnoho – na obr. 2 jsou uvedeny tři z nich, které jsou navíc něčím zajímavé.



Obr. 2

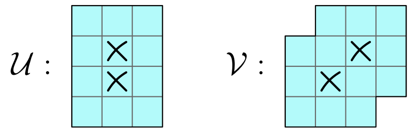
* Popisu všech vyhovujících dvojic zásahů čtverce 4×4 věnujeme doplňující úlohu D2.

Výstřely v prvním příkladu jsou souměrné podle obou diagonál, ve druhém a třetím podle středu celého čtverce. Navíc v prvních dvou příkladech je bez zásahu polovina řádků i polovina sloupců. Ve třetím příkladu nejsou zasažena žádná dvě políčka se společnou stranou. Naopak příklad, kdy zasažená políčka tvoří devět dvojic se společnou stranou, dostaneme jednoduchou úpravou obrázku uprostřed: „rušivou“ dvojici zásahů středového čtverce 2×2 v něm dáme pod sebe.

Poznámka. Popišme přece jen postup, jak příklad vyhovující volby 18 výstřelů poměrně snadno sestrojit a jak současně ověřit jeho správnost, aniž bychom při zkoušce museli s lodí „cestovat“ po celém plánu 12×12.

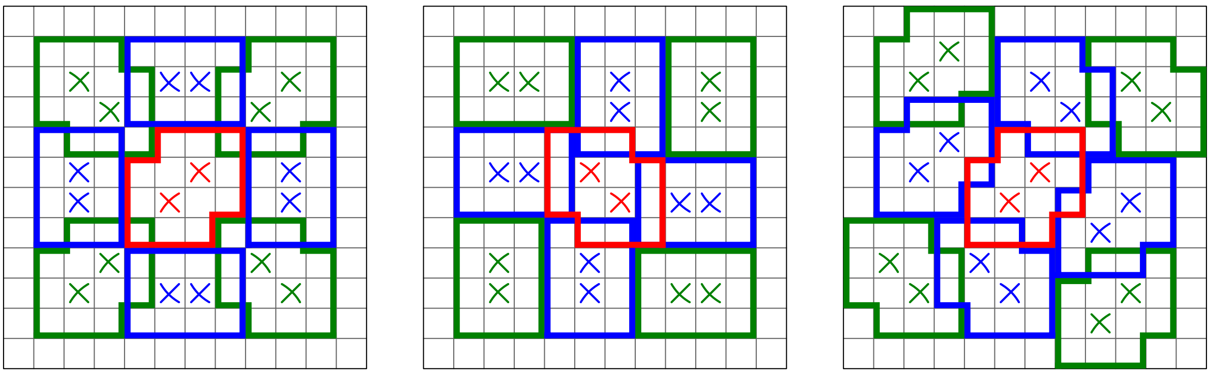
Nazvěme *středovým* políčkem (umístěné) lodi to políčko, které leží uprostřed čtverce 3×3, v němž se loď nachází. Je zřejmé, že středovými políčky lodí mohou být právě políčka vnitřního čtverce 10×10 daného plánu 12×12. Tento čtverec označíme $\mathcal{C}$. Dvě (různá) políčka plánu nazveme *sousední*, mají-li společný aspoň jeden vrchol.

Při vyhovující volbě zasažených políček nemůže žádné z nich, jež leží ve čtverci $\mathcal{C}$, zůstat „osamoceno“, tj. musí být vystřeleno i na některé z osmi s ním sousedících políček. Omezme proto naši konstrukci jen na ty volby 18 výstřelů, kterými bude zasaženo 9 dvojic sousedních políček ve čtverci $\mathcal{C}$. Na obr. 3 jsou uvedeny příklady dvou takových dvojic. Vždy když půjde o dvojici políček se společnou stranou, zasažena bude (aspoň jednou) každá loď se středovým políčkem z útvaru shodným s vykresleným útvarem $\mathcal{U}$. U dvojic políček s jediným společným vrcholem budou zasaženy všechny lodě se středovým políčkem z útvaru shodným s útvarem $\mathcal{V}$.



Obr. 3

Z předchozích úvah plyne, že naším úkolem je *rozmístit devět útvarů* do celého plánu 12×12 tak, aby každý z nich byl shodný s $\mathcal{U}$ nebo $\mathcal{V}$ a aby v jejich sjednocení ležel celý vnitřní čtverec $\mathcal{C}$. Příklady takových rozmístění, která odpovídají třem příkladům, které jsme uvedli v závěru řešení na obr. 2, vidíte na obr. 4. Do jednotlivých útvarů jsme přikreslili i dvojice odpovídajících zásahů.



Obr. 4

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6. [V úlohách a) i b) stačí dva výstřely, v c) čtyři výstřely. Plán 6×6 rozdělte na nepřekrývající se čtverce 3×3.]

D1. Na plánu o rozměrech 6×6 čtverečků se nachází loď tvaru čtverce 2×2. Zdůvodněte, že je potřeba nejméně 9 výstřelů, abychom měli jistotu, že jsme loď zasáhli. [Plán 6×6 rozdělte 9 nepřekrývajících se čtverců 2×2.]

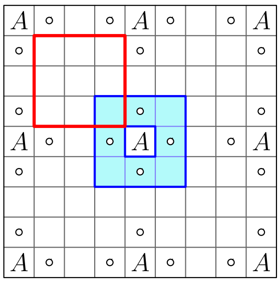
D2. Určete, kolik je všech dvojic políček daného čtverce 4×4, jejichž zásahem dosáhneme s jistotou i zásah lodi ze zadání soutěžní úlohy, která je v tomto čtverci jakkoli umístěna. [Je jich 34. Všechny vyhovující dvojice polí rozdělte do tří skupin podle toho, kolik je v nich políček vnitřního čtverce 2×2 (políčka A, B, C, D na obrázku vlevo). Pak dokažte: V jedné skupině jsou všechny dvojice políček z kvarteta $\mathcal{K} = \{A, B, C, D\}$. Ve druhé skupině jsou všechny dvojice tvořené vždy jedním políčkem $X \in \mathcal{K}$ a jedním z pěti políček $Y \notin \mathcal{K}$, které mají s X aspoň jeden společný vrchol – pro políčko $X = A$ jsou na obrázku vlevo vyznačena tečkou. Ve třetí skupině jsou právě takové dvojice políček, která jsou na obrázku vpravo označena různými čísly téže parity.

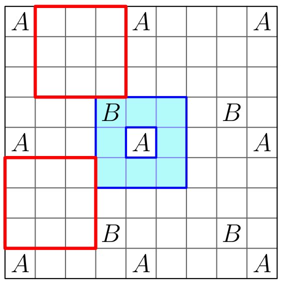
$\circ$	$\circ$	$\circ$	
$\circ$	A	B	
$\circ$	C	D	

	1	1	
4			2
4			2
	3	3	

Hledaný počet je tak roven $6 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 34$.]

D3. Dokažte, že podmínku soutěžní úlohy *je nemožné* splnit tak, že celý plán 12×12 rozdělíme na 9 čtverců 4×4 a pak v každém z nich vystřelíme na dvě políčka, a to na stejných dvou místech ve všech 9 čtvercích. [Označíme stejným z písmen A, B ta zasažená políčka, která jsou na stejném místě ve všech devíti čtvercích. Políčka A tak jsou rozmístěna v jistém čtverci 9×9, jak vidíme na obrázku vlevo. Pro políčka B je tomu obdobně.

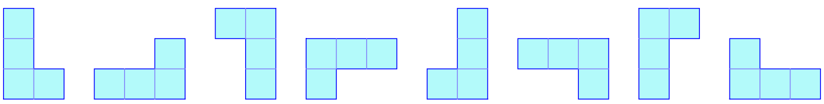




Uvažme loď v poloze, při které obklopuje políčko A ve středu čtverce 9×9. Aby tato loď byla zasažena, musí v některém z osmi jejích políček stát B. Jde-li o jedno ze čtyř modrých políček označených tečkou, pak označení tečkou mají na obrázku vlevo všechna políčka B z našeho čtverce 9×9, ve kterém tudíž můžeme najít čtverce 3×3 bez zásahu, dokonce i bez teček – jeden ze čtyř takových je na stejném obrázku vlevo vyznačen. Je-li uvažovaná loď zasažena v jednom ze čtyř polí v jejích rozích, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že jde o levý horní roh (jinak stačí čtverec na obrázku vlevo pootočit). V uvažovaném čtverci 9×9 se pak nacházejí právě 4 políčka B – viz obrázek vpravo, ve kterém jsou navíc vyznačeny dva z osmi čtverců 3×3 bez zásahu.]

D4. Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. [58–B–I–4]

D5. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě. b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává. [58–B–II–2]