Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí*

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a. (Jaroslav Švrček)

Řešení. Obě čísla m a n jsou evidentně dvojmístná. Nechť tedy $m = 10a + b$ a $n = 10c + d$, kde a, b, c, d jsou číslice desítkové soustavy ($a \neq 0 \neq c$). Podle zadání má platit

$$m + s(n) = (10a + b) + (c + d) = 70, \tag{1}$$
$$n + s(m) = (10c + d) + (a + b) = 70. \tag{2}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme $9(a - c) = 0$, a tedy $a = c$. Záměnou c za a obě rovnice (1) a (2) přejdou ve stejnou rovnici $11a + (b + d) = 70$. Vzhledem k tomu, že $0 \leqq b + d \leqq 18$, získáme pro a odhady $52 \leqq 11a \leqq 70$. Odtud bezprostředně plyne, že buď $a = 5$, nebo $a = 6$. V prvním případě (pro $a = c = 5$) pak z podmínky $11a + (b + d) = 70$ obdržíme $b + d = 15$, tj. $(b, d) \in \{(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)\}$. Ve druhém případě (pro $a = c = 6$) dostáváme $b + d = 4$, a tedy $(b, d) \in \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$. Zkouška není nutná, neboť máme zaručenu platnost obou rovnic (1) a (2).

Závěr. Úloha má 9 řešení, kterými jsou dvojice $(m, n) \in \{(56, 59), (57, 58), (58, 57), (59, 56), (60, 64), (61, 63), (62, 62), (63, 61), (64, 60)\}$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna trojnásobku svého ciferného součtu. [Označme $n = \overline{ab}$, pak $n = 10a + b = 3(a + b)$, tj. $7a = 2b$. Protože čísla 2 a 7 jsou nesoudělná, je $b = 7$ a $a = 2$ ($a \neq 0$), a tedy $n = 27$.]

N2. Určete všechna dvojmístná čísla, která jsou rovna součtu své desítkové číslice a druhé mocniny jednotkové číslice. [Pro hledané číslo $n = \overline{ab}$ platí $n = 10a + b = a + b^2$, tj. $9a = b(b - 1)$. Vzhledem k tomu, že čísla b a $b - 1$ jsou nesoudělná, je buď $9 \mid b$, nebo $9 \mid (b - 1)$. Zadání úlohy vyhovuje pouze $n = 89$.]

N3. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí $n + s(n) = 2019$, kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n. [69–C–S–1]

N4. V roce 2000 Alena zjistila, že její věk je roven součtu číslic roku, v němž se narodila. Kolik má let v roce 2020? [Součet číslic roku jejího narození je roven nejvýše 28 ($= 1 + 9 + 9 + 9$). Rok jejího narození je tedy čtyřmístné číslo tvaru $\overline{19xy}$, pro které platí $2000 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Odtud po úpravě máme $90 = 11x + 2y$, odkud zřejmě $x = 8$ a $y = 1$. Věk Aleny v roce 2020 je tedy 39 let.]

D1. Určete všechna čtyřmístná čísla, která jsou čtyřikrát menší než číslo napsané stejnými stejnými číslicemi, avšak v opačném pořadí. [Označme $\overline{abcd}$ hledané číslo. Pak platí $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Číslice a musí být sudá a současně $a \leqq 2$. Tedy $a = 2$, a tudíž $d = 8$. Jediným řešením je pak číslo 2178.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

2. *Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.* (Ján Mazák)

Řešení. Zvolme libovolný řádek (popř. sloupec) čtvercové tabulky $n \times n$, která je vyplněna čísly 2 a -1. Označme v něm d počet čísel 2 a p počet čísel -1. Pak $d + p = n$ a podle zadání úlohy má platit rovněž $2d - p = 0$. Sečtením těchto dvou rovností obdržíme $3d = n$, což znamená, že číslo n je *nutně* dělitelné třemi, tj. $n = 3k$, kde k je přirozené číslo.

Ukážeme, že tato podmínka je také postačující. Pro libovolné $n = 3k$ rozdělíme tabulku $n \times n$ zřejmým způsobem na k^2 menších čtvercových tabulek 3×3. Snadno se vidí, že každou z těchto menších tabulek 3×3 lze vyplnit požadovaným způsobem – třeba tak, že čísla 2 napíšeme do všech tří polí jedné z jejích diagonál a do šesti zbývajících polí této tabulky napíšeme čísla -1. Celá čtvercová tabulka $n \times n$ pak splňuje podmínku úlohy, protože ji splňuje každá z k^2 vytvořených tabulek 3×3.

Závěr. Daným způsobem lze vyplnit právě ty tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo, které je dělitelné třemi.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný a) dvěma, b) třemi. [a) Nelze — pokud by součet čísel už jen v každém řádku tabulky byl dělitelný dvěma, byl by i součet všech čísel v tabulce dělitelný dvěma. Jejich součet je však roven 45. b) Ano — snadno lze najít konkrétní příklad.]

N2. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0. [Pro každé sudé číslo n lze tabulku $n \times n$ požadovaně vyplnit po vzoru černobílé šachovnice. Pro lichá n to nelze, neboť v žádném řádku (sloupci) nemůže být stejný počet čísel -1 a 1.]

N3. Rozhodněte, zda lze čtvercovou tabulku 3×3 vyplnit přirozenými čísly od 1 do 9 tak, aby každé číslo bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci i na obou úhlopříčkách byl stejný (dostaneme tzv. *magický čtverec*). [Protože součet daných devíti čísel je roven 45, musí být součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci roven $45 : 3 = 15$, což je liché číslo. Lichých čísel je v tabulce o jedno víc než sudých. Navíc $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 10$. Je-li tedy v prostředním poli tabulky číslo 5, snadno najdeme konkrétní příklad možného vyplnění této tabulky.]

D1. Tabulka 3×3 je vyplněna navzájem různými přirozenými čísly tak, že v každém řádku i sloupci je součet krajních čísel roven číslu napsanému mezi nimi. Zjistěte, jaké nejmenší číslo může být napsáno uprostřed tabulky. [69–C–S–2]

D2. Kolika způsoby lze do polí tabulky 2×3 vepsat čísla $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tak, aby každé bylo použito právě jednou a aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný třemi? [Matematický klokan 2018, kat. Junior, úloha 21 (48 možností).]

3. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné.* (Jaroslav Zhouf)

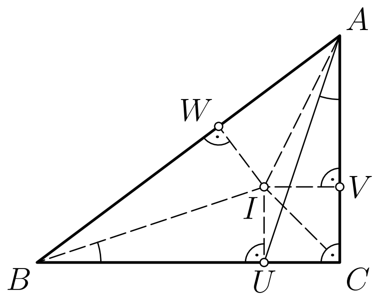
ŘEŠENÍ. Označme V, W dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami AC, AB a ρ její poloměr. Snadno se vidí, že čtyřúhelník $CVIU$ je čtverec se stranou délky ρ. Z osových souměrností podle přímek AI a BI tak při obvyklém označení délek odvěsen trojúhelníku ABC plyne

$$|AW| = |AV| = b - \rho \quad \text{a} \quad |BW| = |BU| = a - \rho.$$

Odtud dostáváme vyjádření délky přepony AB ve tvaru

$$|AB| = |AW| + |BW| = a + b - 2\rho,$$

takže podle Pythagorovy věty platí rovnost $a^2 + b^2 = (a + b - 2\rho)^2$.



Teprve nyní využijeme podmínku úlohy, podle které se pravoúhlé trojúhelníky ACU a BUI shodují v ostrých úhlech u vrcholů A a B (vyznačených na obrázku). Protože se (obecně) shodují i v odvěsnách CU a UI, v naší situaci se jedná (podle věty *usu*) o dva shodné trojúhelníky. To nás vede k rovnosti $|AC| = |BU|$ neboli $b = a - \rho$, tudíž $\rho = a - b$. Dosazením takového ρ do výše upravené rovnosti z Pythagorovy věty obdržíme

$$a^2 + b^2 = (3b - a)^2.$$

Po roznásobení a snadné úpravě vyjde $b(4b - 3a) = 0$, odkud $3a = 4b$.

Závěr. Pro hledaný poměr platí $|AC| : |BC| = b : a = 3 : 4$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Nechť D, E, F jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Pomocí jejich délek a, b, c vyjádřete délky úseků, na které body D, E, F rozdělují jednotlivé strany. [Platí $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$, kde $2s = a + b + c$.]

N2. Délky stran trojúhelníku jsou vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li tento trojúhelník obvod 72 a jeho nejdelší strana je rozdělena bodem dotyku kružnice jemu vepsané na dva úseky v poměru délek 3 : 4. [61–C–I–2]

N3. Označme S střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že dotykové body kružnic vepsaných trojúhelníkům ACS, BCS dělí základnu AB na tři shodné úsečky. Určete poměr $|AB| : |CS|$. [61–C–S–2]

N4. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, jejichž kružnice vepsaná má poloměr 2.[69–C–S–3]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Kolmým průmětem kružnice vepsané danému trojúhelníku na přeponu AB je úsečka MN. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je současně středem kružnice opsané trojúhelníku MNC. [Označme I střed kružnice vepsané a U, V, W postupně jeho kolmé průměty na strany BC, CA, AB. Trojúhelníky IMW, INW a IVC jsou zřejmě shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky (s odvěsnami velikosti ϱ poloměru vepsané kružnice, neboť $|MN| = 2\varrho$). Je proto $|IM| = |IN| = |IC|$.]

4. *Určete, jakých hodnot může nabývat výraz*

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1. (Michal Rolínek, Pavel Calábek)

Řešení. Zlomky v daném výrazu mají smysl, protože jejich jmenovatelé jsou dle zadání kladná čísla. Díky podmínce $a+b+c=1$ pro pro první zlomek platí

$$\frac{a+bc}{a+b}=\frac{(a+b)+(bc-b)}{a+b}=1-b\cdot\frac{1-c}{a+b}=1-b\cdot\frac{a+b}{a+b}=1-b.$$

Analogicky druhý, resp. třetí zlomek nabývá po řadě hodnoty $1-c$, resp. $1-a$. Odtud plyne

$$\frac{a+bc}{a+b}+\frac{b+ca}{b+c}+\frac{c+ab}{c+a}=(1-b)+(1-c)+(1-a)=3-(a+b+c)=2,$$

což je za podmínek úlohy jediná možná hodnota daného výrazu.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

[Využijte identitu $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$. Hodnota daného výrazu je rovna -2.]

N2. Nechť a, b, c jsou nenulová reálná čísla, jejichž součet je roven 0. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

[Jmenovatele zlomků na levé straně nahraďte čísly $-c$, $-a$, $-b$ a po sečtení takto upravených zlomků uplatněte stejnou identitu jako při řešení N1.]

N3. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

[První zlomek rozšiřte z, druhý xz a třikrát využijte podmínku $xyz=1$.]

D1. Jestliže reálná čísla a, b, c splňují rovnici

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

pak platí $a+b+c=0$ nebo $a=b=c$. Dokažte. [18–B–I–1]

D2. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$, jsou-li a_1, a_2, a_3 kladná reálná čísla, jejichž součin je roven 1. [Dokažte a pak mezi sebou vynásobte nerovnosti $1+a_i\geqq 2\sqrt{a_i}$ pro $i=1,2,3$.]

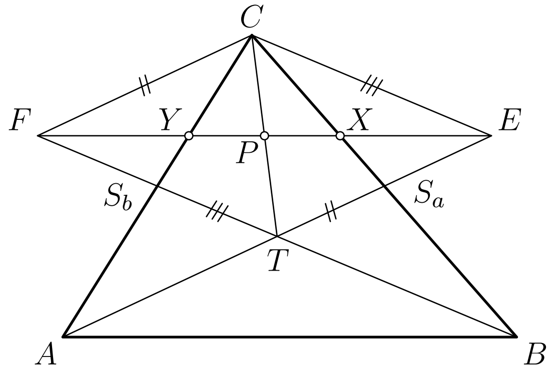
D3. Pro nezáporná reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=1$. Najděte největší a nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

[69–C–II–4]

5. *Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.* (Tomáš Jurík)

Řešení. Označme S_a, S_b po řadě středy stran BC, AC daného trojúhelníku ABC a X, Y po řadě průsečíky dvojic úseček EF a BC, EF a AC. Konečně, nechť P je průsečík úhlopříček rovnoběžníku $TECF$. Shodnost a rovnoběžnost jeho protějších stran je vyznačena na obrázku.



Protože S_a je středem strany BC a $AE \parallel CF$, je úsečka TS_a střední příčkou v trojúhelníku BCF a její délka je polovinou délky úsečky CF, tedy i polovinou délky úsečky TE. Bod S_a je tudíž středem strany TE v trojúhelníku TEC. Odtud plyne, že bod X je jeho těžištěm, neboť úsečky CS_a a EP jsou jeho těžnicemi, jež se protínají právě v bodě X. Analogicky Y je těžištěm trojúhelníku CFT, který je navíc souměrně sdružený s trojúhelníkem TEC podle středu S. Z vlastností délek úseků, které vytínají těžiště X a Y na těžnicích EP a FP ve shodných trojúhelnících TEC a CFT, již bezprostředně plyne tvrzení úlohy.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF. [68–C–S–3]

N2. Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG. [68–C–I–2]

N3. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Označme M střed jeho strany BC. Na polopřímce opačné k BA leží takový bod D, že $|AB| = |BD|$, a podobně na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|AC| = |CE|$. Úsečky TD, TE protínají stranu BC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že body P, M, Q dělí úsečku BC na čtyři stejně dlouhé části. [8. CPS MO juniorů (2019). K důkazu, že P je střed BM, uvažte střední příčku BS v trojúhelníku ADT. Úsečka TP je střední příčkou v trojúhelníku BMS.]

6. *Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od* 1 *do* 100*, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.*

(a) Určete největší možný počet čísel na tabuli.

(b) Určete největší možný součet čísel na tabuli. (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Každé číslo, které je napsáno na tabuli, má jednoznačně určený prvočíselný rozklad $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, kde a, b, c, d jsou vhodná celá nezáporná čísla. Podle parit čísel ve čtveřici (a, b, c, d) zavedeme „typ" čísla n jako čtveřici (A, B, C, D), kde každé z písmen je buď písmeno S (znak pro sudé číslo), nebo písmeno L (znak pro liché číslo). Tak například číslo 60 s rozkladem $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ je typu (S, L, L, S).

Uvědomme si, že přirozené číslo je druhou mocninou, právě když v jeho rozkladu na prvočinitele má každé prvočíslo sudý počet zastoupení. Taková zastoupení zřejmě mají prvočísla v rozkladu součinu $A \cdot B$ právě těch čísel A a B z tabule, která jsou téhož typu. Proto je podmínka úlohy pro součiny dvojic čísel splněna, právě když každá dvě čísla napsaná na tabuli mají různý typ.

Oba zadané úkoly budeme řešit současně. V prvním z nich máme zjistit, jaký největší *počet* čísel může být na tabuli napsán. Odpověď je podle předchozího odstavce rovna počtu těch ze zavedených typů (A, B, C, D), které mají mezi čísly od 1 do 100 své zastoupení. Budou to zřejmě právě ty typy, jejichž *nejmenší zástupce* je číslo, které nepřevyšuje 100.

Všech typů (A, B, C, D) je zřejmě $2^4 = 16$. Pro každý z nich proto nejdříve určíme *nejmenší* číslo k tohoto typu. Bude jím jistě číslo $k = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, kde nejmenší možné mocnitele $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ vybereme podle čtveřice znaků (A, B, C, D) – viz první dva sloupce níže uvedené tabulky. Chybí v ní typy (S, L, L, L) a (L, L, L, L), neboť pro ně jsou nejmenší zástupci $k = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ a $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ větší než 100. Zjišťujeme tak, že největší možný počet čísel na tabuli je roven $16 - 2 = 14$. (Příkladem je 14 hodnot k z tabulky.)

(S, S, S, S)	$k = 1$	$K = 10^2 = 100$
(L, S, S, S)	$k = 2$	$K = 2 \cdot 7^2 = 98$
(S, L, S, S)	$k = 3$	$K = 3 \cdot 5^2 = 75$
(S, S, L, S)	$k = 5$	$K = 5 \cdot 4^2 = 80$
(S, S, S, L)	$k = 7$	$K = 7 \cdot 3^2 = 63$
(L, L, S, S)	$k = 2 \cdot 3 = 6$	$K = 6 \cdot 4^2 = 96$
(L, S, L, S)	$k = 2 \cdot 5 = 10$	$K = 10 \cdot 3^2 = 90$
(L, S, S, L)	$k = 2 \cdot 7 = 14$	$K = 14 \cdot 2^2 = 56$
(S, L, L, S)	$k = 3 \cdot 5 = 15$	$K = 15 \cdot 2^2 = 60$
(S, L, S, L)	$k = 3 \cdot 7 = 21$	$K = 21 \cdot 2^2 = 84$
(S, S, L, L)	$k = 5 \cdot 7 = 35$	$K = 35$
(L, L, L, S)	$k = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$K = 30$
(L, L, S, L)	$k = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$	$K = 42$
(L, S, L, L)	$k = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$	$K = 70$

Druhým úkolem je určení největšího možného *součtu* čísel na tabuli. Ten zřejmě dostaneme tak, že ke každému ze 14 možných typů najdeme jeho největšího zástupce K mezi čísly od 1 do 100, a těchto 14 hodnot K pak sečteme. U každého typu však již známe jeho nejmenšího zástupce k, takže prvních deset* nejmenších čísel tohoto typu má jistě tvar

$$k,\ 2^2 \cdot k,\ 3^2 \cdot k,\ 4^2 \cdot k,\ \ldots,\ 10^2 \cdot k.$$

Číslo K tedy určíme jako největší z nich, které ještě nepřevyšuje 100, a pak je pro každý typ zapíšeme do třetího sloupce tabulky.

Jak jsme již předeslali, v tabulce je uvedeno jen 14 ze 16 možných typů. Čísla zbylých dvou typů (S, L, L, L) a (L, L, L, L) na tabuli napsána být nemohou, neboť pro součin tří nutně zastoupených prvočísel 3, 5 a 7 platí $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 100$. Odpověď na na část a) úlohy tak zní: Největší možný *počet* čísel napsaných na tabuli je roven 14.

Pro čísla napsaná na tabuli dosáhneme největšího součtu, pokud sečteme *největší* přípustná čísla od každého ze 14 možných typů, která jsme zapsali do pravého sloupce tabulky. Odtud plyne odpověď na část b) úlohy: Největší možný *součet* na tabuli napsaných čísel je

$$100 + 98 + 75 + 80 + 63 + 96 + 90 + 56 + 60 + 84 + 35 + 30 + 42 + 70 = 979.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Jaký je největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby součin žádných tří z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti? Uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít menší počet prvků. [68–C–S–1]

N2. Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem. [68–C–II–2]

* Jedenácté číslo $12^2 \cdot k$ nebudeme v našem řešení potřebovat pro žádný ze 14 možných typů, ostatně už $10^2 \cdot k$ je pro každé $k > 1$ větší než 100.