70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

# Úlohy klauzurní části I. kola kategorie A

**1.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Uvnitř jeho stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme $F$ střed kružnice opsané trojúhelníku $ADE$. Dokažte, že $AF \perp BC$.

**2.** Na tabuli je napsáno několik (ne nutně různých) prvočísel tak, že jejich součin je 2020krát větší než jejich součet. Určete jejich nejmenší možný počet.

**3.** Jsou-li $a$, $b$, $c$ navzájem různá nezáporná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+a^2$?

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

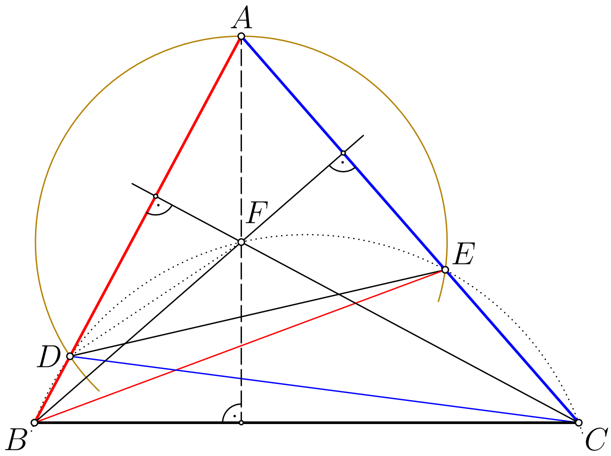
**v úterý 8. prosince 2020 od 8.30 do 12.30**

Soutěžící mají na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

**1.** *Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Uvnitř jeho stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme $F$ střed kružnice opsané trojúhelníku $ADE$. Dokažte, že $AF \perp BC$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Řešení. Bod $F$ jako střed kružnice opsané trojúhelníku $ADE$ leží na osách jeho stran $AD$ a $AE$. Osa úsečky $AD$ díky rovnosti $|CA| = |CD|$ prochází bodem $C$ a je přitom kolmá k přímce $AB$, takže je to přímka, na které leží výška trojúhelníku $ABC$ z vrcholu $C$. Podobně z rovnosti $|BE| = |BA|$ plyne, že na ose úsečky $AE$ leží výška trojúhelníku $ABC$ z vrcholu $B$. Dohromady to znamená, že společný bod $F$ obou os je průsečíkem dvou výšek trojúhelníku $ABC$, a proto jím prochází i jeho třetí výška z vrcholu $A$. Platí tudíž $AF \perp BC$, jak jsme měli dokázat.




Obr. 1

Jiné řešení. Úlohu vyřešíme, když při obvyklém označení $\beta = |\sphericalangle ABC|$ dokážeme, že úhel $DAF$ má velikost $90° - \beta$. To díky rovnoramennému trojúhelníku $ADF$ nastane, právě když středový úhel $AFD$ bude mít velikost $2\beta$, neboli právě když obvodový úhel $AED$ bude mít velikost $\beta$. Poslední je však ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $BCED$ je tětivový. Ověřit tuto vlastnost je už snadné: Z rovnoramenných trojúhelníků $AEB$ a $ADC$ vidíme, že velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ mají i úhly $AEB$ a $ADC$, takže úsečka $BC$ je z bodů $D$ a $E$ vidět pod týmž úhlem $180° - \alpha$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 2 body za důkaz $BF \perp AC$, 2 body za důkaz $CF \perp AB$ (jeden z důkazů lze prohlásit za analogii druhého) a 2 body za závěr o třetí výšce trojúhelníku. Za pouhou hypotézu, že bod $F$ je průsečík výšek trojúhelníku $ABC$, udělte 2 body.

U postupu, který nepracuje s výškami trojúhelníku $ABC$, udělte 2 body za důkaz, že $BCED$ je tětivový čtyřúhelník.

**2.** *Na tabuli je napsáno několik (ne nutně různých) prvočísel tak, že jejich součin je 2020krát větší než jejich součet. Určete jejich nejmenší možný počet.* (Patrik Bak)

Řešení. Prvočísla na tabuli označíme $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Podle zadání platí

$$2020 \cdot (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = p_1 p_2 \ldots p_n. \tag{1}$$

Levá strana rovnosti (1) je dělitelná číslem $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. V prvočíselném rozkladu na pravé straně (1) proto nutně vystupují prvočísla 2, 2, 5, 101. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 101$. Kdyby na tabuli byla jen tato 4 prvočísla (případ $n = 4$), tak by rovnost (1) zřejmě neplatila ($2020 \cdot 110 \neq 2020$). Nutně tedy musí platit $n \geqq 5$.

Dosazením už známých prvočísel $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 101$ do rovnice (1) dostaneme po jejím vydělení číslem 2020 rovnici

$$110 + p_5 + p_6 + \ldots + p_n = p_5 \cdot p_6 \cdot \ldots \cdot p_n. \tag{2}$$

Protože hledáme nejmenší možné $n \geqq 5$, při kterém prvočísla $p_5, p_6, \ldots, p_n$ splňující rovnici (2) existují, rozebereme dále postupně nejmenší v úvahu připadající hodnoty $n = 5, 6, \ldots$, dokud první vyhovující $n$ nenajdeme.

- *Případ* $n = 5$. Rovnice (2) je tvaru $110 + p_5 = p_5$, takže ji nesplňuje žádné prvočíslo $p_5$.
- *Případ* $n = 6$. Příslušnou rovnici

$$p_5 p_6 = p_5 + p_6 + 110 \tag{3}$$

upravíme na součinový tvar

$$(p_5 - 1)(p_6 - 1) = 111.$$

Oba činitelé na levé straně jsou tak nutně čísla lichá, takže čísla $p_5$ a $p_6$ jsou obě sudá.* Jediná sudá prvočísla $p_5 = p_6 = 2$ však rovnici (3) nevyhovují.
- *Případ* $n = 7$. Rovnice (2) má tvar

$$p_5 p_6 p_7 = p_5 + p_6 + p_7 + 110. \tag{4}$$

Zdůrazněme, že naší úlohou je pouze posoudit, zda některá trojice prvočísel rovnici (4) vyhovuje. Uhodnout trojici $p_5 = p_6 = p_7 = 5$ není těžké:

$$5^3 = 125 = 5 + 5 + 5 + 110.$$

Tím je celé řešení úlohy hotovo. Dodejme ještě, že další trojice prvočísel vyhovující rovnici (4) jsou $(2, 5, 13)$ a $(2, 3, 23)$.** Proto v případě, kdy trojici $(5, 5, 5)$ neuhodneme, lze řešení dokončit tak, že do rovnice (4) zkusmo dosadíme nejmenší existující prvočíslo $p_5 = 2$. Pro prvočísla $p_6$ a $p_7$ tak dostaneme rovnici, u které po převodu na součinový tvar $(2p_6 - 1)(2p_7 - 1) = 225$ určíme dokonce dvě prvočíselná řešení $(3, 23)$ a $(5, 13)$.

Shrňme výsledek našich úvah: Na tabuli bylo napsáno aspoň 7 prvočísel, příkladem možné sedmice (uspořádané vzestupně) je $2, 2, 5, 5, 5, 5, 101$.

*Závěr*. Nejmenší možný počet prvočísel na tabuli je roven 7.

* Tento závěr ovšem plyne také přímo z rovnice (3), podle které celá čísla $p_5 p_6$ a $p_5 + p_6$ mají stejnou paritu. Nastane to jedině tehdy, když jde o součin a součet dvou sudých čísel.

** Jiné vyhovující trojice neexistují, viz Poznámku 1 níže.

Poznámky.

1. Naznačme pro zajímavost, jak vyřešit rovnici (4) úplně. První krok jsme už v textu učinili popisem, jak vyřešit případ, kdy jedno ze tří neznámých prvočísel je 2. Podobně lze vyřešit případ, kdy jedno z prvočísel je 3, ve kterém však dostaneme už jen dříve objevené řešení $(2,3,23)$ s prvočíslem 2.

   Zbývá posoudit případ, kdy všechna tři prvočísla $p_5$, $p_6$ a $p_7$ jsou aspoň 5. Při vhodném označení, kdy $p_7$ je největší z nich, platí

$$5 \cdot 5 \cdot p_7 \leqq p_5 p_6 p_7 = p_5 + p_6 + p_7 + 110 \leqq 3p_7 + 110,$$

   odkud plyne $p_7 \leqq 5$. Nutně tak platí $p_5 = p_6 = p_7 = 5$, což je poslední hledané řešení.
2. Lze dokázat, že počet sedmi prvočísel na tabuli je jediný možný.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 1 bod za zdůvodnění, že na tabuli je nutně čtveřice prvočísel $(2,2,5,101)$; 1 bod za zdůvodnění, že jich nemůže být celkem 5; 2 body za zdůvodnění, že jich nemůže být celkem 6; poslední 2 body za uvedení příkladu, že jich může být celkem 7. V závěru řešení ovšem není nutné vypisovat prvně určenou čtveřici dohromady s druhou jakkoli získanou trojicí, neboť zadání úlohy to nevyžaduje.

**3.** *Jsou-li $a$, $b$, $c$ navzájem různá nezáporná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+a^2$?* (Patrik Bak)

Řešení. Úloha je v proměnných $a$, $b$, $c$ symetrická: změnou jejich pořadí dojde jen ke změně pořadí zkoumaných šesti čísel. V první části řešení proto budeme předpokládat, že platí $a < b < c$. Díky nezápornosti čísel $a$, $b$, $c$ pak platí rovněž $a^2 < b^2 < c^2$.

Z vypsaných nerovností snadno plyne, že první trojice čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$ a druhá trojice čísel $a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+a^2$ jsou uspořádány následovně:

$$a+b < a+c < b+c \qquad \text{a} \qquad a^2+b^2 < a^2+c^2 < b^2+c^2. \tag{1}$$

Vidíme, že mezi zkoumanými šesti čísly jsou vždy aspoň tři různá. Ukážeme nyní, že pouze tři různá čísla to být nemohou. Jinak by totiž podle (1) musely platit rovnosti

$$\begin{aligned} a+b &= a^2+b^2,\\ a+c &= a^2+c^2,\\ b+c &= b^2+c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Odečtením první rovnosti od druhé, resp. od třetí rovnosti bychom dostali

$$\begin{aligned} c-b &= (c-b)(c+b),\\ c-a &= (c-a)(c+a). \end{aligned}$$

Odtud po vydělení kladnými čísly $c-b$, resp. $c-a$ vyplývá, že obě čísla $c+b$ a $c+a$ by se rovnala 1, což odporuje nerovnostem (1). Dokázali jsme tak, že mezi zkoumanými šesti čísly jsou vždy aspoň čtyři různá.

V druhé části řešení najdeme trojici různých nezáporných čísel $a$, $b$, $c$ tak, aby mezi zkoumanými šesti čísly byla pouze čtyři různá.

Podle postupu z první části se vyplatí volbu čísel $a$, $b$, $c$ začít tak, aby byla splněna například rovnost $b+c = b^2+c^2$. Jednoduchý způsob, jak toho dosáhnout, je položit $b=1$ a $c=0$. Pak bude šestice čísel v pořadí ze zadání úlohy vypadat takto:

$$a+1,\ 1,\ a,\ a^2+1,\ 1,\ a^2.$$

Za nezáporné číslo $a$ už ovšem nemůžeme volit ani 0, ani 1. Nehodí se ani žádné $a$ mezi 0 a 1, neboť pro ně je v šestici pět různých čísel $a^2 < a < 1 < a^2+1 < a+1$.

Musíme tedy volit $a > 1$. Tehdy bude platit

$$1 < a < a^2 < a^2+1 \qquad \text{a zároveň} \qquad a < a+1 < a^2+1.$$

Vidíme, že v naší šestici budou jen čtyři různá čísla, právě když číslo $a > 1$ bude splňovat podmínku $a^2 = a+1$. Snadným výpočtem zjistíme, že jde o číslo

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

známé pod názvem *zlatý řez* nejen v matematice, ale také v umění.

*Závěr*. Nejmenší možný počet různých čísel v zadané šestici je roven 4.

Jiné řešení. Popišme jeden z dalších způsobů hledání trojic $(a,b,c)$, pro něž jsou v zadané šestici pouze čtyři různá čísla. Taková situace jistě nastane, budou-li splněny dvě ze tří rovnic soustavy (2). Vyberme si rovnice

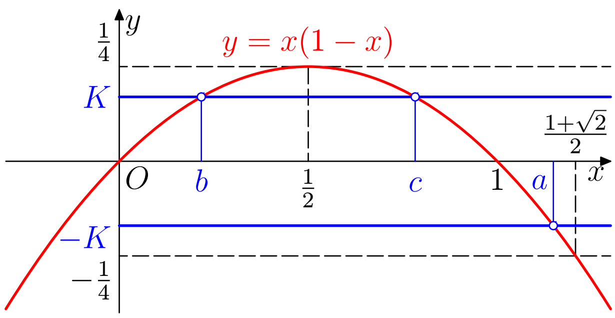
$$a + b = a^2 + b^2 \qquad \text{a} \qquad a + c = a^2 + c^2$$

a s ohledem na symetrii předpokládejme, že $b < c$. Odečteme-li tyto dvě rovnice od sebe, zjistíme, že musí platit $b + c = 1$ (viz text prvního řešení). Odtud s ohledem na $b < c$ máme $b = \frac{1}{2} - t$ a $c = \frac{1}{2} + t$, kde $t \in (0, \frac{1}{2}\rangle$. Při takové volbě čísel $b$ a $c$ dále stačí uvažovat jen první rovnici $a + b = a^2 + b^2$, ze které po dosazení $b = \frac{1}{2} - t$ vyjádříme kladné číslo $a$ pomocí parametru $t$. Zapišme je pro přehlednost rovnou na jeden řádek spolu s vyjádřeními čísel $b$ a $c$:

$$a = \frac{1 + \sqrt{2 - 4t^2}}{2}, \quad b = \frac{1}{2} - t, \quad c = \frac{1}{2} + t.$$

Z možných hodnost $t \in (0, \frac{1}{2}\rangle$ se nehodí pouze $t = \frac{1}{2}$, kdy vyjde $a = c = 1$. Každá hodnota $t \in (0, \frac{1}{2})$ totiž určuje trojici různých kladných čísel $a$, $b$ a $c$, neboť pro ně zřejmě platí $0 < b < c < 1 < a$.

Dodejme, že existenci nalezené nekonečné množiny trojic $(a,b,c)$ lze potvrdit i bez výpočtů. Stačí jen dotyčnou dvojici rovnic $a + b = a^2 + b^2$ a $a + c = a^2 + c^2$ upravit do tvaru $a(a-1) = b(1-b) = c(1-c)$ a využít tvaru paraboly, která je grafem funkce $f(x) = x(1-x)$. Z obrázku vidíme, že podmínce $f(b) = f(c) = -f(a)$ skutečně vyhovuje nekonečně mnoho trojic vždy navzájem různých nezáporných čísel $a$, $b$, $c$.




Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 3 body za důkaz, že mezi šesti zkoumanými čísly jsou vždy aspoň 4 různá; 3 body za příklad situace, kdy jsou různá právě 4.

V případě neúplného důkazu tvrzení, že jde o aspoň 4 různá čísla, udělte: 1 bod za zmínku o symetrii a uvedení obou sérií nerovností typu (1); 1 bod za sestavení soustavy (2). Za důkaz pouhého tvrzení, že jde vždy o aspoň 3 různá čísla, žádný bod neudělujte.

Za druhou část řešení strhněte 1 bod, pokud postup nalezení správné trojice $(a,b,c)$ (například uhodnutím) vyžaduje chybějící prověrku, že ve zkoumané šestici jsou opravdu jen 4 různé hodnoty. K takové prověrce stačí vypsat odpovídajících šest hodnot, pokud je jejich porovnání zřejmé.